

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. Louis FABRY

AIDE-ASTRONOME A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE SUR LA PROBABILITÉ DES COMÈTES HYPERBOLIQUES ET
L'ORIGINE DES COMÈTES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

Décembre 1893, devant la Commission d'examen.

MM. TISSERAND, *Président*.

BOUSSINESQ } *Examinateurs.*
ANDOYER }

MARSEILLE

TYPOGRAPHIE ET LITHOGRAPHIE BARLATIER ET BARTHELET

Rue Venture, 19.

1893

HA Lib.



00635

ACADÉMIE DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

MM.

DOYEN	DARBOUX, professeur....	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES.	<div> <div>PASTEUR.</div> <div>DUCHARTRE.</div> </div>	
	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST.	Chimie
	FRIEDEL.....	Chimie organique
	TISSERAND	Astronomie
	LIPPMANN.....	Physique
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie
	BOUTY.....	Physique
	APPELL.....	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
PROFESSEURS	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale
	PICARD.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique
	Yves DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique
	DASTRE	Physiologie
	DITE	Chimie
	MUNIER-CHALMAS.....	Géologie
	GIARD	Évolution des êtres organisés
	WOLF.....	Astronomie
PROFESSEURS ADJOINTS ..	<div> <div>CHATIN</div> <div>JOLY</div> <div>PELLAT</div> </div>	<div> <div>Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée</div> <div>Chimie</div> <div>Physique</div> </div>
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU	

A

MONSIEUR E. STEPHAN

MEMBRE CORRESPONDANT DE L'INSTITUT, DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE
DE MARSEILLE

Hommage de respectueuse reconnaissance,

L. FABRY.

PREMIÈRE THÈSE

ÉTUDE

SUR

LA PROBABILITÉ DES COMÈTES HYPERBOLIQUES

ET L'ORIGINE DES COMÈTES

INTRODUCTION

Depuis longtemps les astronomes se sont demandé si les comètes doivent être rattachées au système solaire, ou doivent être regardées comme des astres tout à fait étrangers à ce système. Kant autrefois, M. Faye de nos jours ⁽¹⁾, se sont prononcés en faveur de la première hypothèse. Laplace au contraire était partisan de la seconde; l'hypothèse la plus vraisemblable sur l'origine des comètes lui paraît être celle d'Herschel, qui consiste à les regarder comme de petites nébuleuses formées par la condensation de la matière nébuleuse répandue avec tant de profusion dans l'univers; les comètes seraient ainsi, relativement au système solaire, ce que

(1) Voir les *Hypothèses cosmogoniques*, par M. C. WOLF, p. 12 et 68. Et la note de M. FAYE dans les *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXVIII, p. 767.

les aérolithes sont par rapport à la Terre, à laquelle ils sont étrangers (1).

Actuellement, les astronomes ne sont pas encore d'accord sur cette question ; les uns rattachent les comètes au système solaire, par exemple Miss Clerke dans son *History of Astronomy during the nineteenth century*. Les autres sont disposés à défendre l'opinion de Laplace, voir par exemple le *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 219, et les *Hypothèses cosmogoniques* de M. C. Wolf, p. 26 et 73.

La théorie d'après laquelle les comètes seraient tout à fait étrangères au système solaire est à première vue très séduisante, parce qu'elle explique la grande variété des plans des orbites et les mouvements indifféremment directs et rétrogrades, mais l'absence des orbites hyperboliques est une objection contre cette théorie. Aussi plusieurs auteurs ont déjà cherché quel doit être le nombre des orbites hyperboliques ; toutefois leurs travaux n'ayant pas épuisé ce sujet, et n'ayant pas encore mis les astronomes d'accord sur l'origine des comètes, il est intéressant de reprendre l'étude de ces questions.

Le problème que je me propose d'étudier, pris dans toute sa généralité, est le suivant : « Quelles doivent être les lois de la disposition des divers éléments des orbites des comètes, dans l'hypothèse que ces astres viennent des espaces interstellaires ? Ces lois sont-elles celles qui se manifestent en réalité ? » Ce problème comprend donc une première partie purement théorique, et une seconde partie qui doit avoir pour base la statistique des éléments des comètes. La partie théorique peut être résolue complètement, au moins en ne faisant intervenir comme force que l'attraction du Soleil ; mais la seconde partie ne peut être complètement résolue que pour la valeur du grand axe, parce que pour les autres éléments les conditions de visibilité peuvent beaucoup changer la loi de distribution. Ces remarques justifient la division de ce mémoire de la manière suivante :

(1) Sur les Comètes par LAPLACE, dans les *Additions à la Connaissance des temps* pour 1816.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à la valeur du grand axe, c'est-à-dire à la question des comètes hyperboliques qui est ici la plus importante. Le troisième chapitre a pour but la recherche de la disposition théorique des autres éléments, et le quatrième est destiné à l'étude de la disposition de ces éléments, telle qu'elle résulte de la statistique des comètes que nous connaissons.

Pour mesurer les angles, j'emploie la division centésimale de l'angle droit; depuis la publication des tables trigonométriques du service géographique de l'armée, il n'y a aucune objection à faire contre l'emploi de ce système qui présente de grands avantages. J'ai effectué les calculs numériques avec l'arithmomètre (machine à calculer) de M. Thomas; cette machine encore peu connue des astronomes pourrait leur rendre de grands services.

Puisque nous allons nous occuper de questions de probabilité, rappelons que la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles. Pour simplifier nos considérations et nos formules, nous supprimerons souvent en dénominateur le nombre total des cas possibles et nous admettrons dans le langage que les cas favorables se présentent en réalité; cela altère un peu la notion abstraite de probabilité, mais n'a pas d'inconvénient puisque si le nombre des épreuves est suffisamment grand, les cas favorables doivent réellement se présenter.

Remarquons enfin qu'il faudra quelquefois entrer dans des explications détaillées, qui seraient inutiles pour l'exposé de faits universellement admis, mais qui sont nécessaires pour prouver l'exactitude de mes conclusions.

Nota. — Les angles sont mesurés par le système de la division centésimale de l'angle droit; le signe *c* (initiale de centésimale) sert à désigner l'unité d'angle, qui vaut $\frac{1}{100}$ de l'angle droit.

CHAPITRE PREMIER

NOMBRE DES ORBITES DE GRAND AXE DONNÉ A UNE GRANDE DISTANCE DU SOLEIL

1. — Parmi les diverses questions que nous devons étudier, la plus importante est celle des comètes hyperboliques. L'existence de telles comètes est-elle ou non une conséquence forcée de la théorie qui fait venir ces astres des espaces interstellaires? Tel est le problème qui se présente d'abord. Pour le résoudre d'une manière complète, il faut trouver quel doit être, parmi les comètes qui passent au périhélie pendant un temps donné et qui ont une distance périhélie assez petite pour que nous puissions les observer de la Terre, le nombre de celles qui décrivent des hyperboles. Mais la plupart des auteurs qui se sont occupés de cette question ne l'ont pas considérée ainsi, au lieu de compter les comètes hyperboliques de petites distances périhéliques dans le voisinage du Soleil, ils les ont comptées dans les régions de l'espace très éloignées de cet astre où son attraction est insensible, régions inaccessibles à nos observations. A cause de cette circonstance, j'ai divisé mon étude sur la probabilité des comètes hyperboliques en deux chapitres. Dans le premier, nous considérerons les comètes au moment où elles entrent dans la sphère d'activité du Soleil; on désigne ainsi une sphère décrite autour du Soleil avec un rayon très grand, de sorte que l'attraction de cet astre sur un corps placé près de la surface de la sphère soit insensible, ou si l'on veut du même ordre de grandeur que l'attraction des étoiles. Dans le second chapitre, nous considérerons les comètes dans le voisinage du Soleil, c'est-à-dire dans la région où nous les observons. Avant de traiter de la façon qui m'a

paru la plus convenable la question qui fait l'objet du premier chapitre, je rendrai compte des travaux suivants qui ont été publiés sur cette question ⁽¹⁾ :

LAPLACE. — Sur les Comètes, *Connaissance des Temps* pour 1816.

GAUSS. — Compte rendu du Mémoire de Laplace, *Œuvres de Gauss*, t. VI, p. 581.

SCHIAPARELLI. — *Sulla probabilità delle orbite iperboliche per i corpi che dagli spazj stellati arrivano nell'intorno del sistema solare*. A la suite du Mémoire *Sulla Relazione fra le Comete le stelle cadenti ed i meteoriti*. *Memorie del Reale Istituto Lombardo*, t. XII, année 1873.

SCHIAPARELLI. — *Sul calcolo di Laplace intorno alla probabilità delle orbite cometarie iperboliche*. *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo*, série II, t. VII. *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 285.

SEELIGER. — *Ueber die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von hyperbolischen Cometenbahnen*. *Astronomische Nachrichten*, n° 2968. *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 219.

MÉMOIRE DE LAPLACE

Le calcul de Laplace sur la probabilité des comètes hyperboliques a besoin de corrections qui ont été signalées par Gauss et par M. Schiaparelli ; je commencerai par l'exposer tel que l'a donné l'auteur, en ajoutant seulement quelques développements.

2. — Considérons une comète, que nous supposons venir des espaces interstellaires, au moment où elle entre dans la sphère d'activité du Soleil. Désignons par v la vitesse de cette comète, r son

(1) Mentionnons aussi le mémoire de M. DAVIS, voir n° 32, et une note de M. HÆK dans les *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, p. 1205.

rayon vecteur, a, e, q le demi grand axe, l'excentricité, la distance périhélie de l'orbite qu'elle va décrire autour du Soleil. Soit β l'angle de la vitesse v avec le rayon r , la direction de ce rayon étant prise en allant de la comète vers le Soleil et l'angle β étant compté de 0 à 200°; enfin désignons par k le double de l'aire décrite par le rayon vecteur de la comète pendant l'unité du temps. Nous avons d'abord

$$k = rv \sin \beta \qquad q = a(1 - e)$$

La théorie du mouvement des corps célestes ⁽¹⁾ donne :

$$a(1 - e^2) = \frac{k^2}{f}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{f}$$

nous mettons f au lieu de f_μ parce que l'extrême petitesse des masses des comètes permet de faire $\mu = 1$. De ces équations, qui ont lieu aussi bien dans le mouvement hyperbolique que dans le mouvement elliptique, pourvu que dans le cas où l'orbite est hyperbolique a soit regardé comme négatif, on déduit :

$$\sin^2 \beta = \frac{f}{r^2 v^2} \left(2q - \frac{2q^2}{r} + \frac{q^2 v^2}{f} \right) \tag{1}$$

d'où

$$\cos^2 \beta = \frac{1 - \frac{q}{r}}{r^2 v^2} \left[r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r} \right) - 2qf \right]$$

et

$$1 - \cos \beta = 1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{rv} \sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r} \right) - 2qf} \tag{2}$$

Cette dernière formule s'applique seulement aux valeurs de β comprises entre 0 et 100°; pour β entre 100 et 200°, il faut dans le second membre remplacer le signe — par le signe +.

(1) Voir le *Traité de mécanique céleste* de M. TISSERAND, tome I, p. 99.

Maintenant imaginons une sphère dont le centre soit celui de la comète et le rayon égal à l'unité, et admettons que les vitesses des comètes qui sont près des limites de la sphère d'activité du Soleil, sont dirigées uniformément dans toutes les directions, donc indistinctement vers tous les points de la sphère de rayon 1. La probabilité du fait que la direction d'une vitesse fasse avec le rayon vecteur un angle compris entre β et $\beta + d\beta$ est alors ⁽¹⁾ :

$$\frac{2\pi \sin\beta \, d\beta}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin\beta \, d\beta \quad (3)$$

La probabilité que la vitesse fasse avec le rayon vecteur un angle compris entre 0 et β est donc :

$$\frac{1}{2} \int_0^{\beta} \sin\beta \, d\beta = \frac{1}{2} (1 - \cos\beta) \quad (4)$$

Lorsque β est entre 100 et 200° la comète commence par s'éloigner du Soleil, si l'orbite est hyperbolique elle s'éloignera indéfiniment ; si l'orbite est elliptique elle a de grandes chances de sortir complètement de la sphère d'activité du Soleil et de tomber sous l'action de quelque étoile. Nous considérerons donc toute comète pour laquelle β est entre 100 et 200° comme ne devant pas venir passer près du Soleil ⁽²⁾ et nous allons raisonner seulement sur des valeurs de β inférieures à 100°.

Lorsque v restant fixe β varie de 0 à 100°, q augmente constamment avec β ; en effet en prenant la dérivée de l'équation 1 par rapport à q nous trouvons :

$$\frac{d \sin^2 \beta}{dq} = \frac{2f}{r^2 v^2} \left(1 - \frac{q}{a}\right) \quad (5)$$

(1) Le nombre des cas favorables et le nombre des cas possibles sont entre eux comme la surface découpée dans la sphère de rayon 1, ayant pour centre la comète, par deux cônes de révolution dont les génératrices font avec le rayon vecteur les angles β , $\beta + d\beta$ et la surface entière de la sphère de rayon 1.

(2) Si l'on ne voulait pas admettre cette considération, il suffirait de doubler le nombre des comètes elliptiques donné par nos formules.

Comme la quantité $\frac{q}{a}$ est toujours plus petite que 1 lorsque α est positif, et négative lorsque α est négatif, $\frac{d \sin^2 \beta}{dq}$ est toujours une quantité positive, donc q augmente constamment lorsque β augmente de 0 à 100° (1). Il en résulte que v ayant une valeur fixe donnée, la probabilité que la comète viendra passer près du Soleil avec une distance périhélie inférieure à q (2) est la même que la probabilité que la direction de sa vitesse soit entre 0 et β , la valeur de β étant celle donnée par l'équation 1, ou l'équation 2, qui correspond à la limite choisie pour la distance périhélie. Donc, d'après la formule 4, cette probabilité est $\frac{1}{2} (1 - \cos \beta)$, ou d'après l'équation 2 :

$$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{rv} \sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r} \right) - 2qf} \right] \quad (6)$$

Le nombre des comètes de vitesses comprises entre v et $v + dv$ qui se trouvent à l'intérieur d'une unité de volume située dans la région considérée de l'espace, vers la limite de la sphère d'activité du Soleil, peut être représenté par $\varphi(v)dv$, $\varphi(v)$ étant une certaine fonction de v . En multipliant l'expression 6 par $\varphi(v) dv$ nous avons alors le nombre des comètes visibles (3) dont la vitesse est comprise entre v et $v + dv$ qui se trouvent dans une unité de volume, dans la région de l'espace considérée :

$$\frac{\varphi(v)}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{rv} \sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r} \right) - 2qf} \right] dv$$

(1) De même lorsque β varie ensuite de 100° à 200° q diminue constamment.

(2) Nous appellerons les comètes dont la distance périhélie est inférieure à q « comètes visibles » ; parce que lorsque pour la limite q on prend une valeur convenable, une à deux fois le rayon de l'orbite de la Terre, ces comètes sont celles qui viennent passer assez près de nous pour que nous puissions les voir. Remarquons que par comètes visibles, nous n'entendons pas les comètes qui remplissent toutes les conditions de visibilité, mais celles qui remplissent cette seule condition

Le nombre des comètes visibles dont la vitesse initiale est entre deux limites choisies v_1 et V qui se trouvent dans l'unité de volume, est par suite

$$\int_{v_1}^V \frac{\varphi(v)}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{rv} \sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r} \right) - 2qf} \right] dv \quad (7)$$

Remarquons toutefois que les formules que nous venons de trouver supposent que le radical

$$\sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r} \right) - 2qf}$$

a une valeur réelle, il faut donc que la limite inférieure v_1 ne soit pas plus petite que la valeur de v qui annule ce radical.

3. — Laplace suppose toutes les valeurs des vitesses également probables de 0 à une certaine limite U , de sorte que la fonction $\varphi(v)$ est constante pour les valeurs de v inférieures à U et nulle pour les valeurs de v supérieures à U . Alors le nombre total des comètes situées à l'intérieur de chaque unité de volume, dans la région considérée de l'espace, est :

$$\int_0^U \varphi(v) dv = U\varphi$$

φ désignant la valeur constante de $\varphi(v)$.

En divisant la formule 7, où $\varphi(v)$ est remplacée par la constante φ , par la quantité $U\varphi$ nous obtenons.

$$\frac{1}{2U} \int_{v_1}^V \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{rv} \sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r} \right) - 2qf} \right) dv \quad (8)$$

que leurs distances périhélies soient inférieures à une certaine limite ; de telles comètes pourront ne pas être assez grosses pour pouvoir être vues ou être cachées par la lumière du Soleil.

Cette expression représente le rapport du nombre des comètes visibles de vitesses comprises entre v_1 et V renfermées dans une unité de volume, au nombre total des comètes renfermées dans cette unité de volume ; et si nous admettons que la valeur de φ est la même dans toutes les régions de l'espace situées vers la limite de la sphère d'activité du Soleil, nous pouvons dire que : si nous considérons à une très grande distance du Soleil, dans les régions de l'espace où son attraction devient insensible, un volume quelconque, par exemple le volume limité par deux sphères de très grands rayons ayant le Soleil pour centre, l'expression 8 représente le rapport du nombre des comètes visibles dont la vitesse est entre v_1 et V contenues dans ce volume, au nombre total des comètes qui s'y trouvent renfermées.

4. — Jusqu'ici aucune objection à faire au calcul, il n'en est plus de même dans ce qui suit.

La plus petite valeur de v nous dit Laplace est celle qui rend nulle la quantité placée sous le radical

$$\sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right) - 2qf}$$

cette valeur, que nous désignerons par w , est donnée par l'équation :

$$rw = \frac{\sqrt{2qf}}{\sqrt{1 + \frac{q}{r}}} \quad (9)$$

Désignons toujours par V la limite supérieure que nous adoptons pour la vitesse, et cherchons la valeur de l'intégrale 8 entre les deux limites w et V . Pour cela posons

$$\sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right) - 2qf} = rv \sqrt{1 + \frac{q}{r}} - z \quad (10)$$

z étant une nouvelle variable, nous avons alors

$$rv = \frac{2qf + z^2}{2z \sqrt{1 + \frac{q}{r}}} \quad r dv = \frac{z^2 - 2qf}{2z^2 \sqrt{1 + \frac{q}{r}}} dz$$

l'intégrale que contient la formule 8 devient :

$$\int dv + \frac{\sqrt{1-\frac{q}{r}}}{r} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{4qf}{2qf + z^2} + \frac{qf}{z^2} \right) dz$$

et en effectuant l'intégration nous trouvons :

$$v + \frac{\sqrt{1-\frac{q}{r}}}{r} \left(\frac{z}{2} - 2\sqrt{2qf} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2qf}} - \frac{qf}{z} \right) + C \quad (11)$$

C est la constante qui entre dans toute intégrale indéfinie. Il faut déterminer cette constante de façon que l'intégrale s'annule pour $v = w$, d'où $z = \sqrt{2qf}$ d'après l'équation 10; cette condition donne

$$C = -\frac{\sqrt{2qf}}{r\sqrt{1+\frac{q}{r}}} + 2\sqrt{2qf} \frac{\sqrt{1-\frac{q}{r}}}{r} \frac{\pi}{4}$$

et la formule 11 devient :

$$v + \frac{\sqrt{1-\frac{q}{r}}}{r} \left(\frac{z}{2} - 2\sqrt{2qf} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2qf}} - \frac{qf}{z} \right) - \frac{\sqrt{2qf}}{r\sqrt{1+\frac{q}{r}}} + 2\sqrt{2qf} \frac{\sqrt{1-\frac{q}{r}}}{r} \frac{\pi}{4} \quad (12)$$

En multipliant cette formule 12 par $\frac{1}{2U}$ et donnant à v la valeur V , limite supérieure des vitesses, et à z la valeur correspondante, nous obtenons une formule qui n'est autre que l'expression 8, mais dépouillée du signe d'intégration, et dans laquelle pour la limite inférieure v , nous avons pris la plus petite valeur de v .

5. — z étant une fonction compliquée de v , Laplace cherche à simplifier par un développement en série. Il fait pour cela usage d'une quantité auxiliaire déterminée par l'équation

$$1 = V\sqrt{r} \quad (13)$$

V de la vitesse est alors

$$z = \iota \sqrt{r} \sqrt{1 + \frac{q}{r}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2qf}{\iota^2 r \left(1 + \frac{q}{r} \right)}} \right) \quad (14)$$

Suivant Laplace, cette formule 14 pourrait s'écrire, en développant en série :

$$z = \frac{qf}{\iota \sqrt{r}} \left[1 - \frac{q}{2r} \left(1 - \frac{f}{\iota^2} \right) + \dots \dots \right] \quad (15)$$

et cette valeur de z portée dans la formule 12 donnerait

$$\frac{\sqrt{2qf}}{r} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{qf}{\iota r \sqrt{r}} \quad (16)$$

Il ne donne pas le détail de ces transformations sur lesquelles nous reviendrons plus loin (nos 7 et 8). Admettons donc ici que l'expression 16 soit, sauf de petites quantités négligées, égale à l'expression 12 ; alors en divisant l'expression 16 par $2U$ nous obtenons la formule 8 transformée et dépouillée du signe d'intégration :

$$\frac{\sqrt{2qf}}{2U r} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{qf}{2\iota U r \sqrt{r}} \quad (17)$$

Laplace donne cette expression comme représentant la probabilité que la distance périhélie soit inférieure à q et la vitesse initiale inférieure à $\frac{\iota}{\sqrt{r}}$.

6. — Remarquons maintenant que le demi grand axe de l'orbite a est lié à la quantité $\iota = v \sqrt{r}$ par

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{\iota^2}{f r} = \frac{2f - \iota^2}{f r}$$

l'orbite est donc elliptique ou hyperbolique selon la quantité ι^2 est inférieure ou supérieure à $2f$. Si nous faisons $a = -100$ R (parce que nous supposons qu'un orbite hyperbolique dont le demi grand

axe dépasse 100 R en valeur absolue, R étant le rayon de l'orbite terrestre, se confond à l'observation avec une parabole, nous trouvons

$$v^2 = 2f + \frac{fr}{100 R} = \frac{(200 R + r)f}{100 R}$$

le nombre des orbites dont la distance périhélie est inférieure à q et qui sont elliptiques, paraboliques, ou hyperboliques avec un demi grand axe supérieur à 100 R en valeur absolue, s'obtient en portant cette valeur de v dans la formule 17, ce qui donne ⁽¹⁾ :

$$\frac{\sqrt{2gf}}{2Ur} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{10q\sqrt{f}}{2Ur\sqrt{\frac{r}{R}(200R+r)}} \quad (18)$$

Soit v' la valeur de v qui correspond à la limite supérieure U des vitesses (n° 3), $v' = U\sqrt{\frac{r}{R}}$, le nombre total des comètes dont la distance périhélie est inférieure à q s'obtient en faisant dans la formule 17 $v = v'$, ce qui donne ⁽¹⁾ :

$$\frac{\sqrt{2gf}}{2U'r} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{qf}{2v'U'r\sqrt{\frac{r}{R}}} \quad (19)$$

En retranchant le nombre des comètes qui ne sont pas sensiblement hyperboliques, donné par la formule 18, nous obtenons le nombre des comètes qui sont sensiblement hyperboliques :

$$\frac{10q\sqrt{f}}{2Ur\sqrt{\frac{r}{R}(200R+r)}} - \frac{qf}{2v'U'r\sqrt{\frac{r}{R}}} \quad (20)$$

Le rapport de l'expression 18 à l'expression 20 donne le rapport du nombre des comètes non sensiblement hyperboliques au nombre de celles qui sont sensiblement hyperboliques :

(1) Pour la signification précise de cette formule, se reporter à ce qui a été dit pour la formule 8.

$$\frac{\sqrt{2qf}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{10q\sqrt{f}}{\sqrt{\frac{r}{R}(200R+r)}}}{\frac{10q\sqrt{f}}{\sqrt{\frac{r}{R}(200R+r)}}-\frac{qf}{\iota'\sqrt{r}}} \quad (21)$$

Cette expression dépend de la limite supérieure U des vitesses, limite qui y entre par la quantité ι' ; Laplace suppose cette limite U infinie, c'est à dire toutes les vitesses également probables de zéro à l'infini, alors $\iota' = U\sqrt{r}$ est infinie et l'expression 21 devient simplement :

$$\frac{\pi-2}{10}\sqrt{\frac{r}{2q}\left(200+\frac{r}{R}\right)}-1 \quad (22)$$

telle est l'expression donnée par Laplace pour le rapport entre le nombre des comètes qui ne sont pas sensiblement hyperboliques et le nombre de celles qui le sont; les distances périhéliques étant comprises entre o et q et les comètes sensiblement hyperboliques étant celles dont le demi grand axe est entre $-100R$ et 0 .

La limite des distances périhéliques des comètes que nous pouvons voir peut être prise égale à $2R$, et le rayon r de la sphère d'activité du Soleil doit être pris au moins de $100\,000R$, en faisant dans la formule 22, $q = 2R$, $r = 100\,000R$, elle devient

$$\frac{\pi-2}{10}\sqrt{25000 \times 100200} - 1 = 5712,7$$

ce qui montre qu'il ne devrait y avoir qu'une comète sensiblement hyperbolique pour 5713 qui ne le seraient pas.

Laplace cherche ensuite à prouver que la probabilité des orbites sensiblement hyperboliques est encore diminuée par ce fait que le nombre des comètes qui nous échappent n'est pas le même pour toutes les distances périhéliques. Cette seconde partie du calcul n'étant pas nécessaire pour ce que j'ai à dire, je la laisse de côté; je reviendrai d'ailleurs sur cette question dans le second chapitre (nos 42 et 53).

Remarques sur le calcul de Laplace.

7. — Gauss et plus récemment M. Schiaparelli ont fait sur le calcul qui précède des remarques fort justes que nous allons utiliser pour indiquer les rectifications à faire.

D'abord on ne voit pas pourquoi Laplace considère comme plus petite valeur possible de la vitesse v , celle qui annule le radical

$$\sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right) - 2qf}$$

pour de plus petites valeurs de v ce radical devenant imaginaire les formules 7 et 8 sont en défaut, mais la distance périhélie est toujours inférieure à q quel que soit l'angle ⁽¹⁾ β , c'est donc à tort que ces valeurs ont été laissées de côté.

Toutefois ceci ne ferait que rendre encore plus forte la conclusion finale, que les orbites sensiblement hyperboliques doivent être très rares, puisque les valeurs de v négligées correspondent toutes à des orbites elliptiques.

Mais le développement en série du n° 5 dont Laplace ne donne pas le détail est soumis à une objection plus grave. Nous remarquerons d'abord que la transformation opérée est exacte dans le cas où v est une quantité finie de grandeur modérée, ou pour mieux préciser est une quantité du même ordre que \sqrt{f} . Voici en effet dans ce cas comment on peut passer des formules 12 et 14 aux formules 15 et 16 :

(1) La formule 2 montre que pour la valeur de v qui annule le radical et $\beta = 100^\circ$ la distance périhélie est égale à q . Si maintenant β reste égal à 100° et que v diminue la formule $\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{f}$ montre que a diminue, et comme la distance aphélie qui pour $\beta = 100^\circ$ n'est autre que r reste fixe, il faut que la distance périhélie diminue. Si ensuite β devient différent de 100° , nous avons vu (n° 2, formule 5) que la distance périhélie diminue forcément encore.

Nous pouvons regarder $\frac{q}{r}$ comme une petite quantité du premier ordre et faire le développement en série suivant :

$$\sqrt{1 - \frac{2qf}{i^2 r \left(1 + \frac{q}{r}\right)}} = 1 - \frac{qf}{i^2 r \left(1 + \frac{q}{r}\right)} - \frac{1}{2} \frac{q^2 f^2}{i^4 r^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right)^2} - \dots$$

et comme

$$\left(1 + \frac{q}{r}\right)^{-1} = 1 - \frac{q}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \dots$$

nous trouvons :

$$\sqrt{1 - \frac{2qf}{i^2 r \left(1 + \frac{q}{r}\right)}} = 1 - \frac{qf}{i^2 r} + \frac{q^2 f}{i^3 r^2} - \frac{1}{2} \frac{q^2 f^2}{i^4 r^2} + \dots$$

en ne conservant dans le second membre que les quatre termes écrits nous négligeons les termes d'ordre supérieur à $\frac{q^2}{r^2}$, la parenthèse de la formule 14 devient alors

$$\frac{qf}{i^2 r} - \frac{q^2 f}{i^3 r^2} + \frac{1}{2} \frac{q^2 f^2}{i^4 r^2}$$

en multipliant cette expression par $i\sqrt{r}\sqrt{1 + \frac{q}{r}}$ et remarquant que

$$\sqrt{1 + \frac{q}{r}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{q}{r} - \frac{1}{8} \frac{q^2}{r^2} + \dots$$

la formule 14 devient

$$z = i\sqrt{r} \left(\frac{qf}{i^2 r} - \frac{1}{2} \frac{q^2 f}{i^3 r^2} + \frac{1}{2} \frac{q^2 f^2}{i^4 r^2} \right)$$

ou bien

$$z = \frac{qf}{i\sqrt{r}} \left[1 - \frac{q}{2r} \left(1 - \frac{f}{i^2} \right) \right] \quad (23)$$

Cette formule est identique à la formule 15, on peut la diviser en deux facteurs, le premier $\frac{qf}{i\sqrt{r}}$ est rigoureusement exact, et

les termes négligés dans le facteur placé entre crochets renferment au moins la seconde puissance de $\frac{q}{r}$.

Il faut maintenant dans l'expression 12 remplacer z par sa valeur 23 et v par V ou $\frac{1}{\sqrt{r}}$, nous allons conduire le calcul de façon à négliger finalement le carré et les puissances supérieures de $\frac{q}{r}$. De l'équation 23 nous déduisons

$$\frac{qf}{z} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[1 - \frac{q}{2r} \left(1 - \frac{f}{z} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[1 + \frac{q}{2r} \left(1 - \frac{f}{z} \right) \right] \quad (24)$$

dans le facteur entre crochets sont négligés les termes en $\left(\frac{q}{r}\right)^2$ et ceux d'ordre supérieur. Nous avons aussi, par la formule connue du développement de $\text{arctg} x$,

$$\text{arctg} \frac{z}{\sqrt{2qf}} = \frac{z}{\sqrt{2qf}} - \frac{z^3}{6qf\sqrt{2qf}} + \dots \quad (25)$$

D'après 23, puisque \sqrt{r} et 1 sont deux quantités du même ordre, le terme $\frac{z}{\sqrt{2qf}}$ est du même ordre de grandeur que $\sqrt{\frac{q}{r}}$, et le terme en z^3 est du même ordre que $\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Au moyen des formules 23, 24, 25 nous trouvons, en négligeant les termes d'ordre supérieur à (1) $\frac{q}{r}$:

$$\frac{z}{2} - 2\sqrt{2qf} \text{arctg} \frac{z}{\sqrt{2qf}} - \frac{qf}{z} = -\frac{qf}{\frac{1}{\sqrt{r}}} - \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{q}{2\sqrt{r}} \quad (26)$$

multiplions cette expression par

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{r} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{q}{r} - \frac{1}{8} \frac{q^2}{r^2} - \dots \right) \quad (27)$$

(1) Les termes que nous négligeons ici renferment au moins $\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Comme les termes négligés dans la formule 26 sont d'ordre supérieur à $\frac{q}{r}$, ils donneront, dans le produit de 26 par 27, des termes d'ordre supérieur à $\frac{q^2}{r^2}$, et si nous négligeons dans ce produit tous les termes d'ordre $\frac{q^2}{r^2}$ et supérieurs, nous trouvons :

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{r} \left(\frac{z}{2} - 2 \sqrt{2qf} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2qf}} - \frac{qf}{z} \right) = - \frac{qf}{r \sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (28)$$

pour avoir l'expression 12 (avec v remplacé par V), il faut ajouter à cette quantité 28 :

$$V = \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (29)$$

et

$$- \frac{\sqrt{2qf}}{r \sqrt{1 + \frac{q}{r}}} + 2 \sqrt{2qf} \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{r} \frac{\pi}{4}$$

qui, en négligeant $\frac{q^2}{r^2}$, est égale à

$$- \frac{\sqrt{2qf}}{r} + \frac{2 \sqrt{2qf}}{r} \frac{\pi}{4} \quad (30)$$

De sorte que l'expression 12 devient finalement, par l'addition des quantités 28, 29, 30 :

$$\frac{\sqrt{2qf}}{r} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{qf}{r \sqrt{r}}$$

ce qui est bien la formule 16. Ainsi les termes négligés dans cette formule renferment au moins la seconde puissance de $\frac{q}{r}$; et ils sont bien négligeables relativement aux termes conservés, en effet il n'y a d'abord pas de difficulté pour ceux qui proviennent de la formule 30, ils sont négligeables relativement au terme

$\frac{\sqrt{2gf}}{r} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$. Ceux qui proviennent de 23 et 25 renferment la quantité

$$\frac{gf}{\sqrt{r}} \times \frac{g}{r} \times \frac{1}{r}$$

le rapport de cette quantité au second terme de la formule 16 est $\frac{g}{r}$, donc très petit. Enfin les termes négligés qui proviennent de la formule 24, renferment la quantité

$$\sqrt{r} \times \left(\frac{g}{r} \right)^2 \times \frac{1}{r}$$

le rapport de cette quantité au second terme de la formule 16 est $\frac{1}{\sqrt{r}} \times \frac{g}{r}$, il est donc très petit si, comme nous l'admettons ici, ι et \sqrt{r} sont du même ordre de grandeur.

La formule 16 peut donc bien remplacer la formule 12 dans le cas où ι est une quantité finie de grandeur modérée (du même ordre que \sqrt{r}). Mais à la fin du calcul, pour obtenir la formule 22, on a supposé la limite supérieure des vitesses U infinie, et par suite ι infinie; dans ce cas la quantité $\iota \sqrt{r} \times \left(\frac{g}{r} \right)^2 \times \frac{1}{r}$ qui entre dans certains termes négligés devient infinie et ces termes ne sont plus négligeables par rapport aux termes conservés qui restent finis. Donc, si on pousse le développement plus loin que Laplace on trouve des termes qui deviennent infinis pour ι infini, et dans ce cas la formule 16 cesse d'être égale à la formule 12. D'autre part il suffit de remarquer que nous avons remplacé l'intégrale de la formule 8 par la formule 16; or lorsque la limite supérieure V devient infinie l'intégrale devient infinie, la formule 16 au contraire se réduit à son premier terme qui n'est pas du tout infini. Il est donc bien évident que la formule 16 ne peut pas remplacer la formule 12 dans le cas où la limite supérieure des vitesses est infinie.

D'ailleurs, comme le fait remarquer Gauss, la supposition que toutes les vitesses sont également probables de 0 à ∞ est inadmissible, car cette supposition ne laisserait qu'une probabilité infiniment

petite pour chaque vitesse finie, par conséquent les orbites voisines de la parabole seraient infiniment peu probables, et toute la probabilité serait au contraire pour des orbites qui ne se distingueraient pas de lignes droites et seraient parcourues avec des vitesses infinies (1).

8. — Nous ne pouvons donc pas supposer U infinie, mais même dans le cas où nous choisissons pour cette quantité une valeur finie, le développement en série a besoin d'être rectifié; en effet, les vitesses des corps célestes sont du même ordre de grandeur que la vitesse de la Terre dans son orbite, dont la valeur est $\sqrt{\frac{f}{R}}$, si donc U et V sont des grandeurs de cet ordre, ϵ est du même ordre que $\sqrt{f} \sqrt{\frac{r}{R}}$, or les développements précédents ne sont rigoureux que si ϵ est du même ordre que \sqrt{f} . En réalité la quantité ϵ renfermant \sqrt{r} en facteur son introduction masque l'ordre véritable de certains termes, nous devons donc reprendre le développement en laissant ϵ de côté et conservant V dans le calcul. La formule 14 devient alors :

$$z = Vr \sqrt{1 + \frac{q}{r}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2qf}{V^2 r^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right)}} \right] \quad (31)$$

que nous développons comme au n° 7 de la manière suivante :

$$\sqrt{1 - \frac{2qf}{V^2 r^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right)}} = 1 - \frac{qf}{V^2 r^2} + \frac{q^2 f^2}{V^4 r^4} - \frac{q^3 f^3}{V^6 r^6} + \frac{1}{2} \frac{q^4 f^4}{V^8 r^8} + \dots$$

En ne conservant que les cinq termes écrits nous négligeons tous les termes qui renferment au moins $\frac{1}{r^6}$ en facteur, la parenthèse de l'expression 31 devient :

(1) Il est à remarquer que par la manière dont Laplace conduit son calcul, il fait U infinie seulement implicitement en supposant ϵ infinie; c'est peut être pour cela qu'il n'a pas réfléchi aux conséquences de cette supposition.

$$\frac{qf}{V^2 r^2} - \frac{q^2 f}{V^2 r^3} + \frac{q^3 f}{V^2 r^4} + \frac{1}{2} \frac{q^2 f^2}{V^4 r^4}$$

et en multipliant $Vr \sqrt{1 + \frac{q}{r}}$ nous trouvons

$$z = Vr \left(\frac{qf}{V^2 r^3} - \frac{1}{2} \frac{q^2 f}{V^2 r^3} + \frac{3}{8} \frac{q^3 f}{V^2 r^4} + \frac{1}{2} \frac{q^2 f^2}{V^4 r^4} \right)$$

Les termes négligés dans la parenthèse renferment au moins $\frac{1}{r^5}$, et après multiplication par le facteur Vr ils renferment encore $\frac{1}{r^4}$ au moins. Cette formule peut s'écrire

$$z = \frac{qf}{Vr} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{q}{r} + \frac{q^2}{r^2} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \frac{f}{V^2 q} \right) \right] \quad (32)$$

Ici les termes négligés dans la parenthèse renferment au moins $\frac{1}{r^3}$. Nous tirons de cette valeur de z :

$$\frac{qf}{z} = Vr \left[1 + \frac{1}{2} \frac{q}{r} - \frac{q^2}{r^2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \frac{f}{V^2 q} \right) \right] \quad (33)$$

les termes négligés dans la parenthèse renferment au moins $\frac{1}{r^3}$ en facteur, donc les termes négligés dans la valeur totale de $\frac{qf}{z}$ renferment au moins $\frac{1}{r^3}$.

D'après la formule 25 nous avons

$$\text{arctg} \frac{z}{\sqrt{2qf}} = \frac{z}{\sqrt{2qf}} + \dots\dots \quad (34)$$

le terme en z^3 renfermerait déjà $\frac{1}{r^3}$ en facteur. Les formules 32, 33, 34 donnent en négligeant les termes en $\frac{1}{r^3}$:

$$\frac{z}{2} - 2 \sqrt{2qf} \text{arctg} \frac{z}{\sqrt{2qf}} - \frac{qf}{z} = -\frac{3}{2} \frac{qf}{Vr} - Vr \left[1 + \frac{1}{2} \frac{q}{r} - \frac{q^2}{r^2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \frac{f}{V^2 q} \right) \right]$$

en multipliant par $\frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{r}$ et négligeant les termes en $\frac{1}{r^3}$ et supérieurs nous obtenons

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{r} \left(\frac{z}{2} - 2\sqrt{2qf} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2qf}} - \frac{qf}{z} \right) = -\frac{3}{2} \frac{qf}{Vr^2} - V \left[1 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{r^2} \left(1 + \frac{f}{V^2 q} \right) \right] \quad (35)$$

En ajoutant à cette formule 35, V et la quantité

$$-\frac{\sqrt{2qf}}{r\sqrt{1 + \frac{q}{r}}} + 2\sqrt{2qf} \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{r} \frac{\pi}{4}$$

qui en négligeant $\frac{1}{r^3}$ est égale à

$$\frac{\sqrt{2qf}}{r} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{q}{r} \right)$$

nous trouvons

$$\frac{\sqrt{2qf}}{r} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{q}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{q^2}{r^2} \left(V - \frac{2f}{Vq} \right) \quad (36)$$

Cette expression est égale à la formule 12, où v a été remplacée par V, en négligeant les termes en $\frac{1}{r^3}$ et supérieurs.

Il importe de bien voir si les termes négligés dans la formule 36 sont réellement négligeables. D'abord si V est une quantité du même ordre de grandeur que la vitesse de la Terre $\sqrt{\frac{f}{R}}$, il suffit de suivre le calcul pour voir que les termes négligés sont très petits, nos développements en série sont basés sur le fait que dans la formule 31 la quantité $\frac{2qf}{V^2 r^2}$ est très petite, si V est du même ordre de grandeur que $\sqrt{\frac{f}{R}}$, cette quantité est du même ordre que $\frac{2qR}{r^2}$, donc très petite. Mais comme certains

termes négligés renferment V au numérateur ou au dénominateur, nous devons examiner ce qui se passe lorsque la vitesse V est grande ou petite.

D'abord si V est grande les termes qui renferment cette vitesse en dénominateur sont encore plus petits, reste ceux qui la renferment au numérateur. Ceux-ci proviennent uniquement de la formule 33, ce qui montre qu'ils ne renferment au numérateur que la première puissance de V ; au dénominateur ils renferment r^3 (dans la formule 36), tandis que les termes conservés renferment seulement r ou r^2 , il faudrait donc que V soit extrêmement grande pour que la valeur des termes négligés soit sensible, et même, dans ce cas, leur valeur sera toujours très petite relativement au terme $\frac{1}{2} \frac{q^2}{r^3} V$ conservé dans la formule 36 (1).

Examinons maintenant le cas où V serait très petite, nous admettrons cependant qu'on ne fait pas descendre cette vitesse beaucoup au-dessous de la vitesse parabolique à la distance r , il n'y aurait d'ailleurs aucun intérêt à la faire descendre plus bas. Notre développement en série est basé sur la petitesse de la quantité $\frac{2gf}{V^2 r^3}$ (formule 31), si V est de l'ordre de la vitesse parabolique $\sqrt{\frac{2f}{r}}$, la quantité $\frac{2gf}{V^2 r^3}$ est de l'ordre de grandeur de $\frac{g}{r}$, elle est moins petite que lorsque V est comparable à la vitesse de la Terre, mais elle est encore très petite et nos développements en série peuvent se faire. En suivant alors ces développements et en tenant compte de ce que V est du même ordre que $\sqrt{\frac{2f}{r}}$, on voit que les termes négligés dans la formule 36 renferment le facteur

(1) Il semble au premier abord que le même raisonnement pourrait être fait pour la formule 16, les termes en v proviennent de la formule 24 et sont très petits relativement aux termes conservés; mais il n'en résulte pas que les termes négligés dans la formule 16 sont toujours négligeables, parce qu'à la fin du calcul ces termes conservés dans la formule 24 sont détruits par la quantité 29 qui leur est égale et de signe contraire.

$\frac{1}{r^2 \sqrt{r}}$, ils sont donc beaucoup plus petits que les termes conservés et en particulier que le terme $-\frac{gf}{V r^2}$ qui renferme seulement le facteur $\frac{1}{r \sqrt{r}}$ (puisque V renferme $\frac{1}{\sqrt{r}}$). Quant au terme $\frac{1}{2} \frac{q^2}{r^2} V$, dans le cas où V est comparable à la vitesse parabolique $\sqrt{\frac{2f}{r}}$ il est de l'ordre des termes négligés et pourrait être supprimé dans la formule 36.

Si nous comparons les formules 36 et 16, nous voyons qu'elles ne sont pas identiques, car en remplaçant ι par $V \sqrt{r}$ la formule 16 devient

$$\frac{\sqrt{2gf}}{r} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{gf}{V r^2}$$

ce qui diffère de la formule 36 par l'absence des deux termes, savoir :

$$-\frac{1}{2} \frac{q}{r^2} \sqrt{2gf} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{q^2}{r^2} V$$

Si nous avons omis ces deux termes, qui sont cependant du même ordre que le terme conservé $-\frac{gf}{r \sqrt{r}}$, cela tient à ce qu'en faisant usage de la quantité ι qui renferme \sqrt{r} nous masquons l'ordre véritable de certains termes, à moins toutefois que ι bien que renfermant \sqrt{r} ne soit pas grande, comme nous l'avons vu n° 7, et en effet dans ce cas $V = \frac{\iota}{\sqrt{r}}$ est une quantité du même ordre que $\frac{1}{\sqrt{r}}$ et les termes par lesquels les formules 36 et 16 diffèrent deviennent d'un ordre supérieur de $\frac{1}{2}$ unité pour le premier, d'une unité pour le second, au terme conservé $-\frac{gf}{V r^2}$ ou $-\frac{gf}{r \sqrt{r}}$.

Dans la formule 36 nous avons négligé les termes en $\frac{1}{r^2}$; si

nous nous étions contentés de négliger ceux en $\frac{1}{r^2}$, elle se serait réduite à une constante ne renfermant plus la vitesse V .

Remarquons aussi que si V devient infinie la formule 36 devient infinie, par le terme $\frac{1}{2} V \frac{q^2}{r^2}$, ce qui s'accorde bien avec ce qui a été dit à la fin du n° 7.

9. — Nous pouvons maintenant rectifier le calcul de Laplace. D'abord il faut tenir compte des vitesses inférieures à la valeur w qui annule le radical

$$\sqrt{r^2 v^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right) - 2qf}$$

comme ces vitesses correspondent toutes à des distances périhélies inférieures à q , il faut à l'intégrale de la formule 8 prise entre w et V ajouter

$$\int_0^w dv = w \quad \text{avec} \quad w = \frac{\sqrt{2qf}}{r \sqrt{1 + \frac{q}{r}}}$$

la formule 12 devient alors

$$v + \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{r} \left(\frac{z}{2} - 2 \sqrt{2qf} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2qf}} - \frac{qf}{z} \right) + 2 \sqrt{2qf} \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{r}}}{r} \frac{\pi}{4} \quad (37)$$

La seconde rectification consiste à s'abstenir de supposer la limite supérieure des vitesses infinie et de faire des développements en série inexacts.

Pour calculer le rapport entre le nombre des comètes visibles non sensiblement hyperboliques et le nombre de celles qui sont sensiblement hyperboliques, on pourrait théoriquement faire usage de la formule rigoureuse 37 de la manière suivante :

Après avoir adopté pour le demi grand axe limite des orbites hyperboliques que l'observation nous permet de reconnaître, une

certaine valeur, par exemple comme précédemment — 100 R., on calculera la valeur V de la vitesse initiale correspondante par la formule $\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{V^2}{f}$, et la valeur de ε qui correspond à V par la formule 10; on pourra alors obtenir la valeur numérique N₁ de la formule 37.

Adoptant de même pour la limite supérieure U des vitesses une certaine valeur, on calculera la valeur correspondante de ε et la valeur numérique N de la formule 37. Le rapport du nombre des comètes visibles non sensiblement hyperboliques au nombre de celles qui sont sensiblement hyperboliques sera

$$\frac{N_1}{N - N_1}$$

Mais si l'on essaye de faire le calcul numérique par cette méthode, on voit qu'elle n'est pas applicable, parce que la formule 10 donne ε par la différence de deux quantités très grandes et que

dans la formule 37 les termes v et $-\frac{\sqrt{1-\frac{q}{r}}}{r} \frac{qf}{\varepsilon}$ sont presque égaux et les autres très petits.

Nous sommes donc forcés pour le calcul numérique de faire usage de développements en série, nous nous servons de ceux du n° 8. La formule 37 est alors remplacée par la formule 36 augmentée du terme

$$\frac{\sqrt{2qf}}{r\sqrt{1+\frac{q}{r}}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{2qf}}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{q}{r}\right)$$

en négligeant $\frac{1}{r^3}$; de sorte que la formule 37 est remplacée par

$$\frac{\sqrt{2qf}}{r} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{q}{r}\right) + \frac{1}{2} \frac{q^2}{r^2} \left(v - \frac{2f}{Vq}\right) \quad (38)$$

En partant de cette formule et suivant la marche que nous venons d'indiquer on trouve sans peine pour le rapport entre le nombre des

comètes visibles non sensiblement hyperboliques et le nombre des comètes visibles sensiblement hyperboliques :

$$\frac{\sqrt{2qf} \frac{\pi}{2} (2r - q) + q^2 \left(v - \frac{2f}{\sqrt{vq}} \right)}{q^2 \left[U - v - \frac{2f}{q} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{v} \right) \right]} \quad (39)$$

U est la limite supérieure des vitesses, sur laquelle il faudra faire une hypothèse. V est la vitesse qui correspond au demi grand axe — 100 R, où à tout autre demi grand axe que nous choisissons pour séparer les orbites sensiblement et non sensiblement hyperboliques.

10. — Nous devons maintenant examiner la valeur numérique de la formule 39. D'abord si l'on suppose U infinie, cette formule prend la valeur zéro, quel que soit V, car le dénominateur devient infini et le numérateur est fini tant que V n'est pas infinie (1). Ceci confirme ce que nous avons dit, que si les vitesses étaient également probables entre zéro et l'infini toute la probabilité serait pour des hyperboles qui ne différeraient pas de lignes droites.

Supposons, comme précédemment (n° 6) avec Laplace, $q = 2R$, $r = 100000 R$, et pour le demi grand axe limite des hyperboles sensibles $\alpha = -100 R$; pour U, puisque nous ne pouvons pas supposer une valeur infinie, admettons successivement 1, 10, 100 fois la vitesse de la Terre dans son orbite, qui est $\sqrt{\frac{f}{R}}$.

V est donnée par l'équation

$$-\frac{1}{100 R} = \frac{2}{100\ 000 R} - \frac{V^2}{f}$$

Si nous posons $R = 1$, $f = 1$ ce qui revient à prendre pour unité

(1) Si la vitesse V était nulle le terme $-\frac{2f}{\sqrt{vq}}$ aurait une valeur négative infinie, mais nous avons admis (n° 8) que V n'est pas très inférieure à la vitesse parabolique à la distance r; il n'y a pas d'utilité à avoir une formule applicable à ce cas.

de longueur le rayon de l'orbite terrestre, et pour unité de vitesse la vitesse de la Terre dans son orbite, nous trouvons

$$V = 0,100\ 100 \qquad \frac{1}{V} = 9,990\ 01$$

La valeur du numérateur de la formule 39 est alors

$$2\pi \times 100\ 000 - 2\pi + 4 \times 0,100\ 100 - 4 \times 9,990\ 01 = 628\ 272,68$$

le dénominateur devient

$$4 \left(U - 0,100\ 100 - \frac{1}{U} + 9,990\ 01 \right) = 4 \left(U - \frac{1}{U} \right) + 39,559\ 64$$

et on trouve pour la formule 39 les valeurs suivantes :

U	
1	15 881,66.
10	7 936,78
100	1 429,45

Ces nombres montrent que les orbites sensiblement hyperboliques doivent être très rares, avec les suppositions admises, car il ne devrait y avoir selon le cas qu'une orbite sensiblement hyperbolique pour 15882, 7937, 1429 qui ne le seraient pas. Or, comme le fait remarquer M. Seeliger, une vitesse 100 fois plus grande que celle de la Terre dans son orbite est déjà extrêmement grande et probablement très supérieure aux plus grandes vitesses des corps célestes ; et nous verrons en effet (n° 20) que, soit en combinant le mouvement propre et la parallaxe des étoiles, soit par la méthode Doppler-Pizeau, on obtient pour les étoiles des vitesses qui ne dépassent pas quatre fois celle de la Terre.

Si, au lieu de chercher le rapport du nombre des comètes non sensiblement hyperboliques au nombre de celles qui sont sensiblement hyperboliques, nous cherchons le rapport du nombre des comètes

elliptiques ⁽¹⁾ au nombre des comètes hyperboliques, nous trouvons des nombres plus faibles, mais encore très grands. Dans ce cas, il faut faire

$$v = \sqrt{\frac{2f}{r}}$$

en conservant $q = 2$, $r = 100\,000$, $R = 1$, $f = 1$, nous trouvons

$$V = \frac{2\sqrt{5}}{1000} = 0,004\,472\,1 \qquad \frac{1}{V} = 100\sqrt{5} = 223,606\,8$$

Le numérateur de la formule 39 devient

$$2\pi \times 100\,000 - 2\pi + 4 \times 0,004\,472\,1 - 4 \times 223,606\,8 = 627\,417,84$$

le dénominateur

$$4\left(U - 0,004\,472\,1 - \frac{1}{U} + 223,606\,8\right) = 4\left(U - \frac{1}{U}\right) + 894,410$$

et on trouve pour valeurs numériques de la formule 39 :

U	
1	701,49
10	671,75
100	484,73

Nous voyons qu'avec U égale à 100 fois la vitesse de la Terre dans son orbite, il y a encore 485 comètes elliptiques pour une seule hyperbolique.

Remarquons encore que le rayon de la sphère d'activité du Soleil r se trouve en facteur dans le premier terme du numérateur de la formule 39, il en résulte que plus on suppose ce rayon grand, plus les orbites hyperboliques sont rares.

(1) Il ne peut être question dans nos calculs d'orbites mathématiquement paraboliques, la probabilité d'une telle orbite étant évidemment nulle.

D'après ce que nous venons de dire il est incontestable que le calcul de Laplace sur la probabilité des comètes hyperboliques manque de rigueur, mais malgré cela le résultat final, savoir : que les orbites hyperboliques doivent être rares, est exact avec les suppositions admises. Il ne faut pas oublier que le calcul que nous venons de faire ne s'applique qu'au cas où toutes les valeurs des vitesses sont également probables entre zéro et une certaine limite, qu'il ne tient pas compte du mouvement propre du Soleil dans l'espace, et qu'enfin les comètes ont été considérées à une très grande distance du Soleil et non dans son voisinage. Nous reviendrons plus loin sur ces questions.

MÉMOIRES DE M. SCHIAPARELLI

11.— La note sur la probabilité des comètes hyperboliques publiée par M. Schiaparelli, à la suite de son mémoire *Sulla relazione fra le comete le stelle cadenti ed i meteoriti*, peut être divisée en deux parties; la seconde partie renferme les remarques sur le calcul de Laplace que nous venons de développer en détail, dans la première la question des comètes hyperboliques est traitée par une méthode ingénieuse qui tient compte du mouvement du Soleil, mais l'auteur se contente d'une exposition géométrique et ne réduit pas les résultats en formules. Comme c'est avec l'aide de cette méthode que nous traiterons le problème, je me contente ici de la mentionner.

Dans une seconde note publiée dans les *Rendiconti del Reale Istituto lombardo*, série II, t. VII, M. Schiaparelli fait remarquer que la conclusion finale de Laplace est justifiée avec les hypothèses admises, c'est ce que nous avons dit n° 10. Enfin dans le *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 285, il a rappelé ces deux notes et énoncé les propositions suivantes :

Si l'on suppose que toutes les valeurs des vitesses absolues des corps répandus dans l'espace sont également probables depuis zéro jusqu'à une certaine limite U et que le Soleil est animé d'une vitesse

propre H , alors pour les comètes qui approchent du Soleil à une distance moindre qu'une certaine limite fixe :

1° Les hyperboles seront la forme la plus fréquente des orbites, elles seront d'autant plus prédominantes que la valeur de H sera plus grande.

2° Les hyperboles dont le demi grand axe a pour valeur $-\frac{f}{H^2}$ seront plus probables que toutes les autres formes ; elles donneront pour ainsi dire la forme typique ou la forme moyenne des orbites.

3° Les asymptotes de la branche descendante de ces hyperboles ne seront pas uniformément distribuées autour du Soleil ; il y aura dans la direction de l'apex du mouvement solaire un maximum de fréquence d'autant plus prononcé que la vitesse H sera plus considérable.

Nous verrons dans la suite que ces propositions s'accordent avec nos résultats. Cependant nous serons amenés (n° 28 et 50) à modifier la seconde.

La principale conclusion des mémoires de M. Schiaparelli peut être énoncée ainsi :

Si les comètes que nous voyons ne donnent que très peu d'exemples d'orbites hyperboliques, il faut en conclure, lorsqu'on tient compte du mouvement propre du Soleil, que le mouvement des comètes relativement au Soleil est très petit pour toutes celles qui sont répandues dans l'espace, ce qui les distingue des corps appartenant au système des étoiles.

Nos calculs confirmeront cette conclusion.

MÉMOIRE DE M. SEELIGER

12. — La note de M. Seeliger (*Astronomische Nachrichten*, n° 2968) ayant pour but de rectifier le calcul de Laplace, nous serions ramenés en l'exposant en détail à reproduire ce que nous

avons déjà dit. Il suffira donc de montrer que les formules que nous avons données sont d'accord avec celles de M. Seeliger.

Supposant encore toutes les vitesses également probables entre zéro et une certaine limite, cet auteur, par des considérations analogues à celles qui ont guidé Laplace, arrive à l'expression suivante pour le nombre des orbites dont la distance périhélie est inférieure à q et la vitesse à la distance r inférieure à V :

$$\Gamma \left[w + \int_w^V \left(1 - \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{w^2}{V^2}} \right) dv \right] \quad (40)$$

Γ est une constante et w est, comme aux nos 4 et 9, la quantité

$$\frac{\sqrt{2gf}}{r\sqrt{1 + \frac{q}{r}}}$$

Pour retrouver cette formule 40 il suffit de partir de la formule 8, en ayant soin, d'après ce qui a été dit n° 9, d'y ajouter $\frac{w}{2U}$ et de prendre w pour limite inférieure de l'intégrale.

M. Seeliger intègre ensuite la formule 40 et trouve

$$\Gamma \left[V - \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} \left(\sqrt{V^2 - w^2} - w \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{V^2}{w^2} - 1} \right) \right] \quad (41)$$

L'exactitude de cette expression peut être vérifiée par différenciation, d'ailleurs elle se déduit de la formule 37 par le calcul suivant, je remplace dès le commencement v par V :

D'après la valeur de w la formule 10 donne

$$z = r \sqrt{1 + \frac{q}{r}} (V - \sqrt{V^2 - w^2}) \quad (42)$$

et la formule 37 peut s'écrire :

$$V + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\frac{1}{2} (V - \sqrt{V^2 - w^2}) - 2w \operatorname{arctg} \left(\frac{V}{w} - \sqrt{\frac{V^2}{w^2} - 1} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{w^2}{V - \sqrt{V^2 - w^2}} + 2w \frac{\pi}{4} \right] \quad (43)$$

le premier et le troisième terme entre crochets se réduisent à

$$- \sqrt{V^2 - w^2} \quad (44)$$

le second et le quatrième nous donnent

$$w \left[\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{V}{w} - \sqrt{\frac{V^2}{w^2} - 1} \right) \right] \quad (45)$$

Des formules élémentaires de trigonométrie on déduit sans peine

$$\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{1 - y^2}{2y}$$

et en appliquant cette formule, l'expression 45 se réduit à

$$w \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{V^2}{w^2} - 1} \quad (46)$$

D'après les formules 44 et 46, la formule 43 est identique à la formule 41 abstraction faite du facteur Γ . Les formules 37 et 41 sont donc bien d'accord.

Pour les calculs numériques M. Seeliger remplace la formule 41 par une autre approchée que voici :

$$\Gamma \frac{\sqrt{gf}}{r \sqrt{2}} \left[\pi - \frac{\sqrt{2gf}}{Vr} + V \frac{g \sqrt{g}}{r \sqrt{2f}} \right] \quad (47)$$

cette expression, abstraction faite du facteur constant Γ , est identique à l'expression 38 où seulement le terme

$$-\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2gf}}{r} \frac{q}{r}$$

a été supprimé ; mais la suppression de ce terme ne change pas sensiblement les résultats, comme on peut s'en assurer par les calculs numériques du n° 10.

Nos formules sont donc d'accord avec celles de M. Seeliger.

NOUVELLE ÉTUDE DE LA QUESTION

13. — Dans le cas où l'on suppose le Soleil immobile, les méthodes de Laplace et de M. Seeliger pourraient nous conduire aux résultats que nous allons obtenir, mais je préfère reprendre le problème en me basant sur la méthode géométrique donnée par M. Schiaparelli. Nous établirons ainsi nos formules d'une manière plus simple, et qui permet ensuite de tenir compte du mouvement du Soleil.

Nous commencerons par faire abstraction de ce mouvement, et supposer le Soleil immobile dans l'espace.

Soit C (*fig. 1*) une comète située à une très grande distance r du Soleil S, désignons, comme précédemment, par v sa vitesse, β l'angle de cette vitesse avec le rayon vecteur CS, k le double de l'aire décrite par le rayon vecteur pendant l'unité de temps, a le demi grand axe de l'orbite, e l'excentricité, q la distance périhélie. Des équations déjà données (n° 2) :

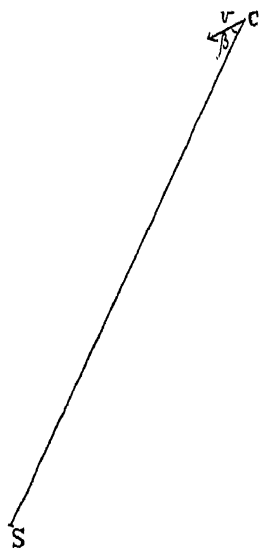


Fig. 1

$$\left. \begin{aligned} k &= rv \sin \beta \\ a(1-e^2) &= \frac{k^2}{f} = \frac{r^3 v^2 \sin^2 \beta}{f} \\ \frac{1}{a} &= \frac{2}{r} - \frac{v^2}{f} \\ q &= a(1-e) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

nous tirons

$$v^2 = \frac{2fq \left(1 - \frac{q}{r}\right)}{r^2 \sin^2 \beta - q^2} \quad (49)$$

En prenant la dérivée par rapport à q on trouve :

$$\frac{dv^2}{dq} = \frac{2f(r \sin \beta - q)^2 + 2qr \sin \beta (1 - \sin \beta)}{(r^2 \sin^2 \beta - q^2)^2}$$

Comme l'angle β est entre 0 et 200° tous les termes du second membre sont positifs, et $\frac{dv^2}{dq}$ est toujours positive, donc lorsque r et β restent les mêmes, q diminue lorsque v diminue ; et pour que la distance périhélie de la comète soit inférieure à une distance donnée q , il faut et il suffit que sa vitesse soit inférieure à la vitesse v donnée par l'équation 49. Ceci nous conduit à une représentation géométrique simple :

Si v et β sont considérées comme les coordonnées polaires d'un point du plan, l'équation 49 représente une hyperbole dont CS est l'axe imaginaire (*fig. 2*), pour que la comète ait une distance périhélie inférieure à q , il est nécessaire et suffisant que l'extrémité de la droite qui représente sa vitesse soit à l'intérieur de l'hyperboloïde de révolution à une nappe engendré par la rotation de cette hyperbole autour de l'axe CS.

Selon que l'angle β est aigu ou obtus, la comète va en se rapprochant ou en s'éloignant du Soleil. Lorsqu'elle va en s'éloignant, si l'orbite est hyperbolique elle s'éloigne indéfiniment, si l'orbite est elliptique elle ne s'éloignerait pas indéfiniment si elle ne subissait que l'action du Soleil, mais elle a de grandes chances de

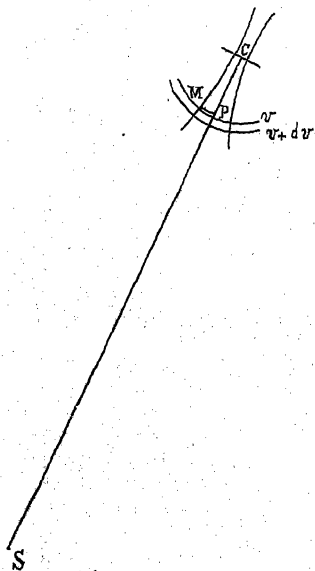


Fig. 2

tomber sous l'action de quelque étoile et par conséquent de ne jamais venir passer près du Soleil. Menons donc par C un plan perpendiculaire à CS, nous ne considérerons comme devant venir passer à une distance du Soleil inférieure à q que les comètes pour lesquelles l'extrémité de la vitesse est à l'intérieur de la moitié de l'hyperboloïde, limitée par ce plan, qui se trouve du côté du Soleil (1).

Comme je l'ai déjà dit, nous appelons ces comètes « *comètes visibles* », parce que lorsqu'on donne à q une valeur convenable, environ deux fois le rayon de l'orbite terrestre, ce sont celles qui viennent passer assez près de nous pour pouvoir être aperçues.

Les carrés des axes de l'hyperbole ont les valeurs suivantes, qui se déduisent de l'équation 49

$$A^2 = \frac{2f'q}{r^2 - q^2} \left(1 - \frac{q}{r}\right) = \frac{2f'q}{r^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right)}, \quad B^2 = \frac{2f}{q} \left(1 - \frac{q}{r}\right) \quad (50)$$

l'axe réel A est donc égal à la quantité 10 (nos 4 et 9), remarquons aussi que

$$\frac{B^2}{A^2 + B^2} = 1 - \frac{q^2}{r^2} \quad (51)$$

Le sinus de l'angle des asymptotes avec l'axe est $\frac{q}{r}$, ou $\frac{R}{r} \times \frac{q}{R}$ (nous désignons toujours par R le demi grand axe de l'orbite de la Terre), cet angle est donc égal à la parallaxe annuelle du

(1) Si l'on ne voulait pas admettre cette considération, il suffirait de doubler le nombre des comètes elliptiques donné par les formules.

Je dois aussi parer l'objection suivante : Nous admettons que les vitesses sont uniformément réparties dans toutes les directions, or, lorsque nous tiendrons compte du mouvement du Soleil, cette répartition uniforme pourrait être mise en doute pour les comètes qui sortent de la sphère d'activité du Soleil, parce qu'elles ont déjà subi l'action de cet astre. Cette objection serait sans valeur, d'abord parce qu'elle ne détruit pas les conséquences du cas théorique où l'on suppose des comètes lancées indifféremment dans toutes les directions, et ensuite parce que nous excluons les comètes qui sortent de la sphère d'activité du Soleil de la plupart de nos considérations, comme s'éloignant indéfiniment.

point C multipliée par $\frac{q}{R}$. L'hyperboloïde est par conséquent extrêmement effilé, puisque nous supposons la distance CS de l'ordre de la distance des étoiles au Soleil.

Puisque $\frac{q}{r}$ est très petit les formules 50 peuvent s'écrire sans erreur sensible

$$A^2 = \frac{2f'q}{r^2} \qquad B^2 = \frac{2f}{q} \qquad (52)$$

plus r est grand, plus ces valeurs de A et B se rapprochent des valeurs exactes données par les formules 50.

14. — Cherchons maintenant parmi les comètes visibles placées en C quelles sont celles qui décriront des orbites hyperboliques. Pour cela nous n'avons qu'à chercher celles dont la vitesse est comprise entre deux limites v_1 et V , puis à donner à v_1 et V des valeurs convenables. Du point C comme centre décrivons deux sphères de rayons v , $v + dv$ (*fig. 2*), le nombre des comètes placées dans l'unité de volume autour du point C et pour lesquelles les extrémités des vitesses sont comprises entre ces deux sphères (1), peut être représenté par $\varphi(v)dv$; $\varphi(v)$ étant une certaine fonction de v . Comme nous admettons que les directions des vitesses sont également réparties dans tous les sens, pour avoir le nombre de ces comètes qui viendront passer à une distance du Soleil inférieure à q , il faut multiplier $\varphi(v)dv$ par le rapport de la surface s détachée dans la sphère de rayon v par la partie de l'hyperboloïde tournée du côté du Soleil, à la surface s de la sphère entière. Donc le nombre des comètes visibles placées dans l'unité de volume au voisinage du point C et dont la vitesse est comprise entre v et $v + dv$ est :

$$\varphi(v) \frac{s}{S} dv \qquad (53)$$

(1) Il va sans dire que nous considérons toutes les droites qui représentent ces vitesses comme transportées parallèlement à elles-mêmes de façon que leur origine soit en C.

Soit M, l'un des points où l'hyperboloïde coupe la sphère de rayon v , de ce point abaissons sur CS la perpendiculaire MP, dont nous désignerons la longueur par b , nous avons alors :

$$s = 2\pi v(v - \sqrt{v^2 - b^2}) \quad s = 4\pi v^2$$

$$\frac{s}{S} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{v^2}} \right)$$

l'équation de l'hyperboloïde, dont les axes sont A et B, nous donne :

$$1 - \frac{b^2}{v^2} = \frac{B^2}{A^2 + B^2} \left(1 - \frac{A^2}{v^2} \right)$$

de sorte que la formule 53 devient

$$\frac{1}{2} \varphi(v) \left(1 - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sqrt{1 - \frac{A^2}{v^2}} \right) dv$$

ou, d'après la formule 51 :

$$\frac{1}{2} \varphi(v) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{A^2}{v^2}} \right) dv \quad (54)$$

il faut maintenant intégrer cette expression de v , à V , nous représenterons par I l'intégrale ainsi obtenue

$$I = \int_{v_1}^V \frac{1}{2} \varphi(v) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{A^2}{v^2}} \right) dv \quad (55)$$

telle est l'expression de laquelle dépend le nombre des orbites dont le grand axe est compris entre certaines limites. Elle s'accorde avec les formules que nous avons déjà données, car il suffit de remplacer A par sa valeur tirée de la formule 50 pour retrouver la formule 7.

15. — La formule 55 n'est applicable que si la limite inférieure v_1 des vitesses n'est pas plus petite que A ; car pour les valeurs de v

plus petites que A, la sphère de rayon v ne coupant plus l'hyperboloïde, nos raisonnements ne peuvent pas se faire, et dans la formule le radical devient imaginaire. Si l'on veut partir de zéro comme limite inférieure, on voit sans peine qu'il faut faire $v_1 = A$ et ajouter ensuite

$$\int_0^A \frac{1}{2} \varphi(v) dv$$

pour tenir compte des vitesses comprises entre 0 et A, nous trouvons ainsi :

$$I' = \int_0^A \frac{1}{2} \varphi(v) dv + \int_A^V \frac{1}{2} \varphi(v) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{A^2}{v^2}} \right) dv \quad (56)$$

I' est le nombre des comètes visibles de vitesses inférieures à V qui se trouvent dans l'unité de volume au point C de l'espace. Au lieu de l'unité de volume, considérons l'espace compris entre deux sphères de rayons très grands r et $r + dr$ (1) ayant le Soleil pour centre, le nombre des comètes visibles de vitesses comprises entre 0 et V contenues dans cet espace peut être représenté par $J dr$. En admettant que la fonction $\varphi(v)$ et par conséquent I' ont les mêmes valeurs en tous les points situés à la distance r du Soleil, dans n'importe quelle direction, nous avons :

$$J dr = I' \times 4\pi r^2 dr$$

donc

$$J = 2\pi r^2 \int_0^A \varphi(v) dv + 2\pi r^2 \int_A^V \varphi(v) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{A^2}{v^2}} \right) dv \quad (57)$$

(1) Nous désignons, suivant l'usage, par dr un petit accroissement donné à r .

J est le nombre des comètes visibles de vitesses inférieures à V qui se trouvent dans l'espace compris entre deux sphères de rayons r , $r + 1$ ayant le Soleil pour centre.

Il est à remarquer que la formule 57 s'applique seulement au cas $V > A$, qui est le cas général car A est extrêmement petit, si cependant on voulait prendre pour V une valeur inférieure à A , on aurait simplement

$$J = 2\pi r^2 \int_0^V \varphi(v) dv \quad (58)$$

Conséquences des formules.

16. — Pour réduire en nombres les formules 56 et 57, il faudrait connaître la fonction $\varphi(v)$, or cette fonction est inconnue, on pourrait la chercher soit par des considérations théoriques soit au moyen des mouvements propres des étoiles, mais il paraît difficile d'arriver à la trouver avec certitude. Supposons d'abord $\varphi(v)$ constante pour v comprise entre zéro et une certaine limite U , nous retrouvons les résultats déjà obtenus au n° 10.

En effet, si dans la formule 57 on remplace A par sa valeur 50 et qu'on suppose que $\varphi(v)$ est une constante, que nous désignerons simplement par φ , on retrouve la formule 40, la constante Γ est seulement remplacée par $2\pi r^2 \varphi$. Nous avons vu n° 12 que la formule 40 est égale à la formule 37 multipliée par Γ , donc lorsqu'on suppose $\varphi(v)$ constante la formule 57 est égale à la formule 37 multipliée par $2\pi r^2 \varphi$. En faisant usage de la formule 57 nous serions donc conduits aux résultats donnés n° 10. La seule chose à ajouter est la recherche du nombre total des comètes visibles ; cette question n'est pas sans intérêt, car il ne suffit pas de prouver que le nombre des comètes visibles à peu près paraboliques doit être très grand relativement au nombre des comètes visibles hyperboliques, il faut encore examiner si le nombre absolu de ces comètes paraboliques n'est pas très petit.

Soit N la valeur numérique de la formule 37 lorsqu'on y remplace v par U limite supérieure de toutes les vitesses. Puisque la formule 57 ne diffère de la formule 37 que par le facteur $2\pi r^2 \varphi$, en désignant par J_2 le nombre total des comètes visibles comprises entre deux sphères de rayons $r, r + 1$ ayant leur centre au Soleil, nous avons :

$$J_2 = 2\pi r^2 \varphi N \quad (59)$$

Soit N_2 le nombre total des comètes dans l'unité de volume.

$$N_2 = \int_0^U \varphi dv = U \varphi \quad (60)$$

donc :

$$\frac{J_2}{N_2} = \frac{2\pi r^2}{U} N$$

En remplaçant la formule 37 par la formule approchée 38 on trouve :

$$\frac{J_2}{N_2} = \left[\sqrt{2gf} \frac{\pi}{2} (2r - q) + q^2 \left(U - \frac{2f}{Uq} \right) \right] \times \frac{\pi}{U} \quad (61)$$

La valeur numérique de la quantité entre crochets se déduit sans peine des calculs du n° 10, et l'on obtient pour $\frac{J_2}{N_2}$, selon que U est 1, 10, 100 fois la vitesse de la Terre dans son orbite, les valeurs suivantes :

U	$\frac{J_2}{N_2}$
1	1 973 901
10	197 402
100	19 752

Avec les suppositions admises n° 10, le nombre des comètes visibles renfermées entre les deux sphères de rayons $r, r + 1$ est donc très considérable relativement au nombre total des comètes renfermées dans l'unité de volume.

17. — Nous devons faire remarquer ici qu'on ne peut pas conclure des nombres du n° 10 que, dans l'hypothèse qui fait venir les comètes des espaces interstellaires, les orbites doivent presque toutes nous paraître paraboliques. Trois raisons s'opposent en effet à cette conclusion.

1° Les nombres obtenus ne s'appliquent qu'au cas où $\varphi(v)$ est une constante, supposition dont la vérité est incertaine.

2° Les calculs ne tiennent aucun compte du mouvement du Soleil dans l'espace.

3° Les nombres de comètes visibles sensiblement paraboliques et nettement hyperboliques que nous avons trouvés, sont les nombres de ces comètes très loin du Soleil et non dans son voisinage

La seule conclusion à tirer est la suivante : Si la fonction $\varphi(v)$ est constante, les comètes visibles hyperboliques sont très rares relativement à celles dont les orbites diffèrent peu de la parabole, dans les régions de l'espace très éloignées du Soleil ; et cela seulement si le Soleil est immobile dans l'espace.

Si au lieu de supposer $\varphi(v)$ constante on fait sur cette fonction telle hypothèse que l'on voudra, la formule 56 ou 57 donnera le nombre des orbites dont le grand axe a une valeur donnée, les résultats seront très différents selon les hypothèses. Il est à remarquer toutefois que puisque $\varphi(v)$ entre simplement en facteur dans chaque élément des intégrales des formules 56 et 57, et que lorsque $\varphi(v)$ est constante les comètes hyperboliques sont très rares, ces comètes ne pourront être nombreuses que si $\varphi(v)$ est beaucoup plus petite pour les très petites valeurs de v pour les valeurs un peu grandes ; mais il n'est pas prouvé qu'il n'en soit pas ainsi.

18. — Il ne sera pas inutile de citer une fonction $\varphi(v)$ qui donne beaucoup d'orbites hyperboliques ; nous pourrions facilement en trouver un grand nombre, mais afin de faire une hypothèse simple, nous supposerons que les vitesses sont encore comprises entre zéro et une limite U , et que les extrémités des droites qui les représentent

sont également réparties dans l'espace, étant en nombres égaux dans des volumes égaux, alors il est facile de voir que

$$\varphi(v) = Mv^3 \quad (62)$$

M étant une constante.

On pourrait objecter que cette loi qui suppose que le nombre des vitesses augmente jusqu'à la limite U et ensuite devient nul n'est pas probable, mais on obtient une loi plausible en supposant qu'après avoir suivi à peu près la loi représentée par la formule 62, le nombre des vitesses diminue ensuite suivant une autre loi quelconque lorsque v dépasse U; et comme toutes les vitesses supérieures à U correspondent à des orbites hyperboliques, en les négligeant nous ne pouvons que diminuer le nombre des orbites hyperboliques.

Supposons donc $\varphi(v) = Mv^3$, la formule 57 devient

$$J = 2\pi r^2 M \int_0^v v^3 dv - 2\pi r^2 M \int_A^v \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} \sqrt{v^2 - A^2} v dv$$

les intégrations s'effectuent sans difficulté :

$$J = \frac{2}{3} \pi r^2 M \left[V^3 - \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} (V^2 - A^2)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (63)$$

Pour les calculs numériques on est encore obligé de faire un développement en série, on a à cet effet :

$$(V^2 - A^2)^{\frac{3}{2}} = V^3 - \frac{3}{2} A^2 V + \frac{3}{8} A^4 V^{-1} + \dots$$

$$\left(1 - \frac{q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{r^2} - \frac{1}{8} \frac{q^4}{r^4} - \dots$$

et en multipliant membre à membre :

$$\sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} (V^2 - A^2)^{\frac{3}{2}} = V^3 - \frac{3}{2} A^2 V - \frac{1}{2} \frac{q^2}{r^2} V^3 + \dots \quad (64)$$

Si nous gardons les trois termes écrits, en remarquant que A^2 renferme $\frac{1}{r^2}$ en facteur, nous voyons que le rapport des termes négligés aux termes conservés renferme au moins le carré de $\frac{1}{r}$. Lorsque V est la vitesse parabolique $\sqrt{\frac{2f}{r}}$ le rapport des termes négligés au second terme $-\frac{3}{2} A^2 V$ renferme encore $\frac{1}{r}$ au moins. En développant A^2 de la manière suivante :

$$A^2 = \frac{2fg}{r^2} \left(1 + \frac{q}{r}\right)^{-1} = \frac{2fg}{r^2} \left(1 - \frac{q}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \dots\right)$$

la formule 64 devient

$$\sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} (V^2 - A^2)^{\frac{3}{2}} = V^3 - \frac{3fg}{r^2} V - \frac{1}{2} \frac{q^2}{r^2} V^3 \quad (65)$$

Dans cette formule le rapport des termes négligés au terme $-\frac{3fg}{r^2} V$ renferme au moins la première puissance de $\frac{1}{r}$, et cela même lorsque V est la vitesse parabolique à la distance r . La formule 63 devient maintenant (1) :

$$J = \pi q M \left(2fV + \frac{1}{3} q V^3\right) \quad (66)$$

Tel est, dans l'hypothèse que $\varphi(v)$ est représentée par la formule 62, le nombre des comètes visibles dont les vitesses sont inférieures à V qui se trouvent entre deux sphères de rayons $r, r+1$ ayant le Soleil pour centre.

19. — Réduisons la formule 66 en nombres, en faisant comme

(1) On peut aussi arriver à ces formules par la considération du volume limité par l'hyperboloïde et la sphère du rayon V , en remplaçant la sphère par le plan tangent on arrive à la formule approchée 66.

précédemment $q = 2$, $r = 100\ 000$ (1), $R = 1$ et U successivement 1, 10, 100 fois la vitesse de la Terre dans son orbite, que nous prenons pour unité de vitesse, de sorte que $f = 1$. Pour calculer d'abord le nombre total des comètes visibles nous avons :

$$\frac{J}{\pi q M} = 2U + \frac{2}{3} U^3$$

d'où les valeurs suivantes

U	$\frac{J}{\pi q M}$
1	2,666.....
10	686,666.....
100	666 866,666.....

En remplaçant maintenant V par la vitesse parabolique à la distance $r = 100\ 000$, qui a été calculée n° 10, nous trouvons :

$$\frac{J}{\pi q M} = 0,008\ 944\ 2 + \frac{2}{3} \frac{1}{1000\ 000 \times 5 \sqrt{5}} = 0,008\ 944\ 3$$

Le rapport du nombre des comètes elliptiques au nombre des comètes hyperboliques, pour $U = 1$ par exemple, est :

$$\frac{0,008\ 944\ 3}{2,666\ 666\ 7 - 0,008\ 944\ 3}$$

et de même pour les autres valeurs de U , on trouve ainsi les nombres suivants :

U	
1	0,003 365
10	0,000 013
100	0,000 000 013

(1) On remarque que r n'entre pas dans la formule 66, les résultats ne dépendent donc de r que parce que la vitesse V qui correspond à une valeur donnée de a en dépend légèrement, il en résulte que les résultats sont ici à peu près indépendants de r .

d'après lesquels les comètes elliptiques devraient être extrêmement rares.

Cherchons le nombre des comètes ou elliptiques ou hyperboliques avec demi grand axe supérieur à 100 en valeur absolue, nous avons vu n° 10 que dans ce cas $V = 0,100\ 100$, cette valeur de V donne

$$\frac{J}{\pi q M} = 2 \times 0,100\ 100 + \frac{2}{3} 0,001\ 003 = 0,200\ 869$$

Ce nombre combiné avec ceux obtenus pour $V = U$, donne les résultats suivants pour le rapport entre le nombre des orbites qui sont ou elliptiques ou hyperboliques avec demi grand axe supérieur à 100 en valeur absolue et le nombre des orbites hyperboliques avec demi grand axe inférieur à 100 :

U	
1	0,081 462
10	0,000 293
100	0,000 000 301

On voit que dans le cas que nous examinons, les orbites peu différentes de la parabole sont rares, et que presque toutes les orbites sont des hyperboles dont le demi grand axe est inférieur à 100 en valeur absolue.

Pour obtenir le nombre total absolu des comètes visibles, il suffit de multiplier les valeurs de $\frac{J}{\pi q M}$ pour $V = U$ par la valeur de $\pi q M$. En désignant encore par N_2 le nombre total des comètes renfermées dans l'unité de volume et par J_2 le nombre des comètes visibles renfermées entre deux sphères de rayon r , $r + 1$ ayant le Soleil pour centre, nous avons ici :

$$N_2 = \int_0^U M v^2 dv = \frac{1}{3} M U^3$$

d'où

$$\frac{J_2}{N_2} = \frac{3J_2}{M U^3} = \frac{J_2}{\pi q M} \times \frac{3\pi q}{U^3}$$

Les valeurs de $\frac{J_2}{\pi q M}$, qui sont les valeurs de $\frac{J}{\pi q M}$ pour $V = U$, ont déjà été obtenues, il suffit de les multiplier par $\frac{3\pi q}{U^3}$, nous trouvons ainsi :

U	$\frac{J_2}{N_2}$
1	50,265
10	12,943
100	12,570

On voit que les résultats sont complètement différents selon la fonction qu'on choisit pour $\varphi(v)$, cette fonction étant inconnue nous n'insisterons pas davantage sur les diverses hypothèses qu'on pourrait faire et nous allons examiner la question en tenant compte du mouvement propre du Soleil.

ÉTUDE DE LA QUESTION

EN TENANT COMPTE DU MOUVEMENT DU SOLEIL

Notions sur les mouvements des étoiles et du Soleil.

20. — Comme nous avons souvent à considérer les vitesses du Soleil et des étoiles, un aperçu des données qu'on possède sur ce sujet trouve naturellement place ici.

Les mouvements propres des étoiles ⁽¹⁾ montrent que les corps répandus dans l'espace sont animés de vitesses dirigées en tous sens et aussi grandes que celles que les astres du système solaire possèdent les uns par rapport aux autres. Un certain nombre d'étoiles paraissent avoir une parallaxe sensible et, bien que les valeurs trouvées pour ces parallaxes soient souvent incertaines, il sera intéressant de chercher quelle vitesse on obtient pour chacune de ces étoiles en combinant la parallaxe et le mouvement propre. Désignons par μ le mouvement propre annuel et par p la parallaxe, la projection du mouvement linéaire annuel de l'étoile sur un plan perpendiculaire au rayon visuel est $\frac{R\mu}{p}$, R étant toujours le rayon de l'orbite de la Terre ; la longueur parcourue par la Terre en

(1) Voir *Les Étoiles*, par le P. SECCHI, t. II, p. 29 ; et les catalogues dressés par M. ROBERT, *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 98 et t. VIII, p. 369.

une année est $2\pi R$, donc en prenant pour unité la vitesse de la Terre dans son orbite, la vitesse de l'étoile perpendiculairement au rayon visuel est

$$\frac{\mu}{2\pi p} \quad (67)$$

L'*Annuaire du Bureau des longitudes* (1892, p. 304) donne un tableau des parallaxes, en appliquant la formule 67 aux étoiles de ce tableau on trouve les valeurs suivantes :

β Cassiopée*	0,57	1831 Fédorenko.....	0,15
34 Groombridge*	1,45	11677 Arg-œltzen*.....	1,87
η Cassiopée	0,90	α Centaure.....	0,80
α Petite Ourse	0,11	17415 Arg-œltzen'.....	1,01
σ^3 Eridan	3,78	p' Ophiucus*	1,20
α Taureau.....	0,20	Véga....	0,38
α Cochier .. .	0,33	18609 Arg-œltzen*	1,05
Sirius	0,57	σ Dragon*.....	1,22
Procyon .. .	0,74	α Aigle*.....	0,51
1643 Fédorenko.....	0,91	61 Cygne. .	1,87
21185 Lalande .	1,58	ε Indien.	3,65
21258 Lalande.....	2,91	9352 Lacaille*	3,96

La moyenne de toutes ces vitesses est 1,33. En supprimant les étoiles marquées d'une astérisque, dont la parallaxe n'a été déterminée que par un seul auteur, on trouve une moyenne à peine différente (1,28).

On peut encore avoir des données sur les vitesses des étoiles en ayant recours à la méthode spectroscopique Doppler-Fizeau. Dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes* pour 1891, à la page 31 de l'intéressante notice de M. Cornu, on trouve les valeurs des composantes suivant le rayon visuel des vitesses d'un certain nombre d'étoiles observées à Potsdam et à Greenwich. Les vitesses sont exprimées en kilomètres par seconde, en divisant ces valeurs par la

vitesse de la Terre exprimée avec la même unité (29 k., 77), on obtient pour les vitesses suivant le rayon visuel les valeurs suivantes :

	Potsdam	Greenwich		Potsdam	Greenwich
α Cassiopée.	— 0,5	+ 1,8	β Gémeaux.	0,0	— 1,7
β Andromède...	+ 0,4	— 0,2	γ Lion.....	— 1,3	— 1,2
γ Andromède...	— 0,4	— 1,2	α Bouvier.	— 0,3	— 2,4
α Bélier.	— 0,5	— 0,2	ε Bouvier.	— 0,6	— 0,3
α Persée.	— 0,4	— 1,3	β Petite Ourse..	+ 0,5	+ 1,5
α Taureau.	+ 1,6	+ 1,7	β Hercule.	— 1,2	— 2,9
α Cocher.	+ 0,8	+ 1,2	γ Cygne.	— 0,2	— 0,8
α Orion.	+ 0,5	+ 1,6	α Cygne.....	— 0,2	— 2,0
γ Gémeaux.	— 0,5	— 1,0	ε Pégase.	+ 0,3	— 0,5
Sirius.	— 0,4	— 0,8			

Le signe — indique que l'étoile se rapproche, le signe + qu'elle s'éloigne. On voit que les deux déterminations sont quelquefois peu d'accord, la moyenne des déterminations de Greenwich (prises en valeur absolue) est 1,3, la moyenne de celles de Potsdam est 0,6. M. Vogel a publié récemment un important mémoire ⁽¹⁾, dans lequel il donne aussi 0,6 comme moyenne des vitesses suivant le rayon visuel de 47 étoiles observées à Potsdam.

Pour passer de la valeur moyenne de l'une des composantes à la valeur moyenne de la vitesse totale, admettons que les vitesses sont dirigées indifféremment dans toutes les directions ⁽²⁾. Considérons en un point C de l'espace toutes les vitesses qui ont une certaine valeur v , autour du point C décrivons une sphère de rayon 1, les points où les vitesses v coupent cette sphère sont uniformément

(1) *Monthly Notices*, t. LII, *Bulletin astronomique*, t. IX, p. 262 et 494.

(2) Cette supposition, très admissible pour les vitesses absolues des étoiles, n'est pas très rigoureuse pour les vitesses relatives, à cause du mouvement du Soleil, mais les données que nous possédons sur le mouvement des étoiles ne sont pas assez sûres pour qu'il y ait intérêt à faire ici un calcul entièrement rigoureux.

répartis sur sa surface. Soit II' le diamètre dirigé suivant le rayon visuel, menons deux rayons de la sphère faisant avec CI des angles α et $\alpha + d\alpha$, par leur rotation autour de CI on obtient deux cônes qui limitent sur la sphère de rayon 1 une zone dont l'aire est

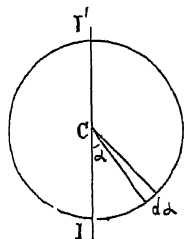


Fig. 3

$$2\pi \sin \alpha d\alpha$$

le nombre des vitesses v qui coupent la sphère dans cette zone varie donc proportionnellement à $2\pi \sin \alpha d\alpha$, la valeur de la composante de ces vitesses perpendiculairement au rayon visuel est $v \sin \alpha$.

En partageant ainsi la sphère du rayon 1 en une série de zones, faisant la somme des composantes de toutes les vitesses et divisant par le nombre total de ces vitesses, nous obtenons la moyenne des composantes des vitesses v perpendiculairement au rayon visuel :

$$\frac{\int_0^{\pi} v \sin \alpha \times 2\pi \sin \alpha d\alpha}{\int_0^{\pi} 2\pi \sin \alpha d\alpha} = v \times \frac{\pi}{4}$$

Le facteur $\frac{\pi}{4}$ étant le même pour toutes les valeurs de v , la moyenne des projections des vitesses sur un plan perpendiculaire au rayon visuel est égale à la moyenne des vitesses multipliée par $\frac{\pi}{4}$. En appliquant ceci à la valeur 1,33, obtenue par la combinaison des parallaxes et des mouvements propres, nous trouvons comme moyenne des vitesses des étoiles :

$$1,33 \times \frac{4}{\pi} = 1,7$$

Cherchons à déduire aussi cette quantité de la composante suivant le rayon visuel. Le raisonnement précédent nous conduit encore au but, mais les vitesses qui se trouvent dans la zone limitée par les directions $\alpha, \alpha + d\alpha$ ont pour composantes suivant le rayon visuel

$v \cos \alpha$, et comme nous considérons seulement des valeurs absolues, il faut prendre $\cos \alpha$ en valeur absolue. Nous trouvons alors pour la moyenne des composantes des vitesses v :

$$\frac{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \cos \alpha \times 2\pi \sin \alpha d\alpha}{\int_0^{\pi} 2\pi \sin \alpha d\alpha} = \frac{v}{2}$$

Il en résulte que la moyenne des composantes de toutes les vitesses suivant le rayon visuel est la moitié de la moyenne des vitesses totales. En appliquant ceci aux valeurs déduites de la méthode Doppler-Fizeau, on trouve donc pour vitesse moyenne des étoiles 1,2 par les observations de Potsdam et 2,6 par les observations de Greenwich. Ces valeurs et celle trouvée par les mouvements propres et les parallaxes (1,7) s'accordent assez bien, étant donné qu'elles sont déduites d'observations très délicates et entièrement différentes.

On voit que la vitesse moyenne des étoiles paraît être environ une fois et demie la vitesse de la Terre dans son orbite. Othon Struve était arrivé à une valeur plus faible (1), d'après cet astronome la vitesse moyenne des étoiles serait 2,4 fois celle du Soleil, évaluée elle-même à 1,54 rayons de l'orbite terrestre par an, donc, en prenant pour unité la vitesse de la Terre dans son orbite, elle serait

$$\frac{1,54 \times 2,4}{2\pi} = 0,59$$

ce nombre est plus faible que ceux que nous avons trouvés, mais il est basé sur l'hypothèse que la parallaxe des étoiles de première grandeur est en moyenne 0^e,000 068, valeur probablement trop forte car sur une vingtaine d'étoiles de première grandeur on n'en

(1) *Astronomische Nachrichten*, t. XXI, p. 65.

connaît jusqu'ici que quatre ou cinq dont la parallaxe paraisse atteindre cette valeur.

Pour terminer ce que nous avons à dire sur les mouvements des étoiles, cherchons la relation entre la moyenne des vitesses et leur limite supérieure U , lorsqu'on fait sur la fonction $\varphi(v)$ les hypothèses mentionnées précédemment. Si l'on suppose que $\varphi(v)$ est une constante (n° 10) la moyenne des vitesses est

$$\frac{\int_0^U v \varphi dv}{\int_0^U \varphi dv} = \frac{U^2}{2U} = \frac{U}{2}$$

de sorte que la limite U est le double de la vitesse moyenne.

Si l'on suppose que $\varphi(v) = Mv^2$ (n° 18) la vitesse moyenne est

$$\frac{\int_0^U v \times Mv^2 dv}{\int_0^U Mv^2 dv} = \frac{3U^4}{4U^3} = \frac{3}{4} U$$

la limite U est donc alors les $\frac{4}{3}$ de la vitesse moyenne.

Examinons maintenant les connaissances acquises jusqu'ici sur le mouvement du Soleil. L'accord des résultats obtenus par différents astronomes, au moyen d'étoiles différentes les unes boréales les autres australes, montre que le Soleil se meut certainement à travers les espaces stellaires avec un mouvement qui lui est propre. Les déterminations des coordonnées du point de la sphère céleste vers lequel il se dirige ⁽¹⁾ ont donné des résultats qui varient de 290° à 306° pour les ascensions droites, de + 22° à + 44° pour les déclinaisons.

(1) Nous appellerons ce point « apex » du Soleil, et le point opposé « antiapex ».

naisons ⁽¹⁾, résultat très satisfaisant pour une recherche aussi délicate. De l'ensemble de ces déterminations, on peut déduire pour les coordonnées de l'apex du Soleil, rapportées à l'équinoxe du milieu du dix-neuvième siècle :

$$R = 294^{\circ}$$

$$D = + 33^{\circ}$$

Il nous sera utile de connaître la position de ce point par rapport à l'écliptique, comme l'ascension droite est voisine de 300° et que la position du point en question n'est connue qu'approximativement, il suffit de conserver l'ascension droite pour valeur de la longitude et d'ajouter l'obliquité de l'écliptique (26°) à la déclinaison pour avoir la latitude, nous trouvons ainsi pour coordonnées écliptiques de l'apex du Soleil :

$$\text{Longitude} = 294^{\circ}$$

$$\text{Latitude} = + 59^{\circ}$$

Il serait très important pour nos recherches de connaître la vitesse du mouvement propre du Soleil, mais cette quantité est très difficile à déterminer parce que la distance des étoiles nous est inconnue. O. Struve a trouvé que la valeur angulaire du mouvement du Soleil vu de la distance moyenne des étoiles de première grandeur (perpendiculairement au rayon visuel) doit être $0^{\circ},000\ 105$ par an, M. Dunkin a trouvé plus tard la valeur très peu différente $0^{\circ},000\ 145$, mais avant lui Airy ⁽²⁾ avait obtenu $0^{\circ},000\ 491$ valeur beaucoup plus forte. Toutefois comme les calculs d'Airy sont basés seulement sur 113 étoiles animées de forts mouvements propres, on peut penser que ces étoiles sont plus rapprochées de nous que ne

(1) Je fais abstraction des déterminations antérieures à l'année 1844, voir le *Vade mecum de l'Astronome*, par HOUZEAU, p. 393.

(2) O. STRUVE. — *Astronomische Nachrichten*, t. XXI, p. 65.

AIRY. — *Memoirs of the Royal astronomical Society*, t. XXVIII.

DUNKIN. — Id., t. XXXII.

Les nombres que je cite pour la vitesse du Soleil sont les moyennes des deux déterminations de chaque auteur.

Voir aussi les récents résultats de M. PORTER et de M. VOGEL, *Bulletin astronomique*, t. X, p. 215 et p. 308.

l'indique leurs grandeurs (1), et par conséquent que la valeur déduite pour le mouvement du Soleil vu d'une étoile de première grandeur est trop forte. Les résultats de Struve sont basés sur 392 étoiles, ceux de M. Dunkin sur 1167 étoiles, nombre considérable.

Pour déduire la vitesse du Soleil de son mouvement angulaire vu des étoiles de première grandeur, il faudrait connaître la distance de ces étoiles ; O. Struve en leur supposant une parallaxe de 0^e,000 068 en moyenne déduit pour le mouvement annuel du Soleil 1,54 rayon de l'orbite terrestre par an, ce qui donne pour la vitesse du Soleil en prenant pour unité la vitesse de la Terre dans son orbite :

$$\frac{1,54}{2\pi} = 0,25$$

Comme je l'ai dit à propos des mouvements des étoiles, la valeur de la parallaxe admise par Struve paraît trop forte, le mouvement du Soleil serait donc plus rapide qu'il ne l'a supposé. En admettant pour le mouvement angulaire la valeur de M. Dunkin et pour la parallaxe moyenne des étoiles de première grandeur 0^e,000 030 valeur très admissible, on trouve pour vitesse du Soleil :

$$\frac{0,000\ 115}{2\pi \times 0,000\ 030} = 0,61$$

Enfin avec la valeur du mouvement angulaire obtenue par Airy on arriverait à une vitesse très supérieure.

La valeur de la vitesse du Soleil obtenue par Struve paraît donc plutôt trop faible que trop forte, mais pour qu'on ne puisse pas objecter que j'augmente arbitrairement cette vitesse, lorsque je voudrais donner des exemples numériques j'emploierai cette valeur, qui est juste le quart de la vitesse de la Terre dans son orbite.

(1) Voir à ce sujet la note de M. PROCTOR, dans les *Monthly Notices*, t. xxx, p. 48.

Après cette digression sur les mouvements des corps célestes, revenons aux comètes, et puisque le Soleil est en mouvement, tenons compte de cette circonstance.

21. — Désignons par h la vitesse absolue d'une comète placée au point C, soit CE (fig. 4) la droite qui la représente et CD la droite qui représente la vitesse du Soleil H transportée au point C. Il est facile de voir que la vitesse v de la comète relativement au Soleil est représentée par la droite DE . Il en résulte que la condition pour que la comète placée en C vienne passer à une distance du Soleil inférieure à q est que l'extrémité E de sa vitesse absolue soit à l'intérieur de l'hyperboloïde que nous avons considéré n° 13, mais transporté parallèlement à lui-même de façon que son centre soit au point D.

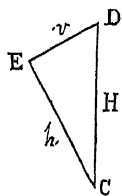


Fig. 4

Cherchons parmi ces comètes quelles sont celles dont la vitesse relative initiale est entre des limites données. Du point D comme centre avec les rayons v et $v + dv$ décrivons deux sphères qui détachent dans la moitié de l'hyperboloïde tournée vers le Soleil le volume $MNM'N'$ (fig. 5), pour avoir le nombre des comètes visi-

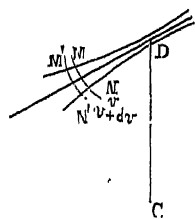


Fig. 5

bles placées en C dont la vitesse relativement au Soleil est entre v et $v + dv$, il faut chercher le nombre des comètes placées en C dont l'extrémité de la vitesse tombe dans le volume $MNM'N'$. Ce volume est infiniment petit; lorsque la distance au Soleil r est une distance finie sa dimension dans le sens perpendiculaire à l'axe de l'hyperboloïde n'est pas infiniment petite, mais d'après ce que nous avons dit n° 13 elle est extrêmement petite et elle devient infiniment petite si r est regardé comme augmentant indéfiniment. Nous pouvons donc regarder le volume $MNM'N'$ comme infiniment petit dans tous les sens, et en appelant b la distance du point M à l'axe de l'hyperboloïde sa valeur est

$$\pi b^2 dv$$

La valeur de b a déjà été calculée n° 14, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, ce qui permet de prendre pour les axes de l'hyperboloïde les valeurs 52, on trouve

$$\pi b^2 dv = \frac{2\pi f q}{r^2} \left(1 + \frac{qv^2}{2f}\right) dv \quad (68)$$

Représentons par $\varphi(h)dh$ le nombre des comètes qui sont placées dans l'unité de volume autour du point C et qui ont leurs vitesses absolues comprises entre h et $h + dh$. Les extrémités de ces vitesses (supposées transportées en C) sont toutes à l'intérieur de l'espace compris entre deux sphères de rayons h et $h + dh$ décrites du point C comme centre, le volume de cet espace est $4\pi h^2 dh$. Nous admettons que ces vitesses sont réparties également dans toutes les directions. Donc, si nous considérons un volume infiniment petit quelconque, dont nous représenterons la valeur par u , situé à la distance h du point C, le nombre des comètes placées dans l'unité de volume autour du point C et dont les extrémités des vitesses (transportées en C) tombent dans ce volume est :

$$\varphi(h)dh \times \frac{u}{4\pi h^2 dh} = \frac{\varphi(h)}{4\pi h^2} u$$

En représentant par χ le nombre des comètes pour lesquelles l'extrémité de la vitesse tombe dans le volume infiniment petit $MM'N'N'$, dont la valeur est donnée par la formule 68, nous avons donc :

$$\chi = \varphi(h) \frac{fq}{2r^2 h^2} \left(1 + \frac{qv^2}{2f}\right) dv \quad (69)$$

Cette expression est égale au nombre des comètes visibles placées dans l'unité de volume autour du point C et dont la vitesse relative au Soleil est entre v et $v + dv$.

Pour avoir le nombre des comètes visibles placées dans l'unité de volume autour du point C et dont la vitesse relative est entre zéro et V , il faut intégrer l'expression 69 de $v = 0$ à $v = V$, en regardant h comme une fonction de v , donnée par la relation suivante,

qui se déduit sans peine du triangle formé par v , h , H (*fig. 4*)

$$h^2 = v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2 \quad (70)$$

H est la vitesse du Soleil, et α l'angle de cette vitesse avec la droite qui va du Soleil au point C , droite à laquelle l'axe de l'hyperboloïde est parallèle.

Donc en désignant comme au n° 15 par I' le nombre des comètes visibles dont la vitesse relative est inférieure à V qui se trouvent dans l'unité de volume autour du point C , nous avons :

$$I' = \frac{fq}{2r^3} \int_0^V \varphi(\sqrt{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2}) \times \frac{1 + \frac{qv^2}{2f}}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} dv \quad (71)$$

pour simplifier l'écriture nous poserons

$$f(r, \alpha) = \varphi(\sqrt{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2}) \times \frac{1 + \frac{qv^2}{2f}}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} \quad (72)$$

la formule 71 s'écrit alors plus simplement

$$I' = \frac{fq}{2r^3} \int_0^V f(v, \alpha) dv \quad (73)$$

Cherchons maintenant le nombre des comètes visibles de vitesses relatives inférieures à V qui sont dans l'espace compris entre deux sphères de rayons r , $r + dr$ ayant le Soleil pour centre. Pour cela considérons d'abord le volume annulaire limité par ces deux sphères et deux cônes de révolution ayant leur sommet au Soleil, la vitesse du Soleil pour axe et pour génératrices les directions α et $\alpha + d\alpha$. Tous les points de ce volume étant dans les mêmes conditions, le nombre des comètes visibles dont les vitesses relatives sont inférieures à V , qui se trouvent dans ce volume annulaire, s'obtient en multipliant l'expression 73 par sa valeur, $2\pi r^2 \sin \alpha dr d\alpha$, ce qui donne :

$$I'' = \pi/q \sin \alpha dr d\alpha \int_0^V f(v, \alpha) dv \quad (74)$$

Pour avoir le nombre des comètes visibles de vitesses relatives inférieures à V qui se trouvent entre deux sphères de rayons $r, r + dr$ ayant le Soleil pour centre, il faut intégrer cette expression de $\alpha = 0$ à $\alpha = \pi$. En appelant, comme au n° 15, ce nombre Jdr , nous avons donc :

$$J = \pi f q \int_0^{\pi} \left(\int_0^V f(v, \alpha) dv \right) \sin \alpha d\alpha \quad (75)$$

la fonction $f(v, \alpha)$ est donnée par la formule 72.

22. — La formule 75 donnera la valeur de J lorsque la fonction $\varphi(h)$ sera connue, mais il faudra faire attention de bien donner à $\varphi(\sqrt{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2})$, dans la formule 72, la valeur que prend $\varphi(h)$ pour $h = \sqrt{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2}$, et à ce sujet nous devons faire une remarque pour le cas où, comme nous l'avons fait précédemment, on suppose que $\varphi(h)$ est constante pour les valeurs de h comprises entre zéro et une limite U et nulle au-delà, ou plus généralement que pour les valeurs de h comprises entre 0 et U $\varphi(h)$ est représentée par une fonction donnée et est nulle au-delà. Dans ce cas, on pourrait en effet remplacer $\varphi(\sqrt{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2})$ par la fonction donnée, effectuer les intégrations d'après les règles du calcul intégral et substituer ensuite à V des valeurs numériques, mais ce procédé ne peut être appliqué que si $\sqrt{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2}$ est toujours inférieur à la limite U , ce qui n'a lieu que si V est inférieure à $U - H$.

Supposons V comprise entre $U - H$ et $U + H$ (nous admettons d'abord $U > H$). Du point C comme centre avec le rayon U et du point D avec le rayon V décrivons deux sphères (*fig. 6*). Soit I l'un des points d'intersection de ces deux sphères, dans les formules 72 et 75, tant que α est inférieur à l'angle CDI , que nous appelons α_1 , la fonction φ est représentée par la fonction considérée pour $v < V$. Mais lorsque α dépasse α_1 , comme pour $v = V$ la vitesse absolue $h = \sqrt{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2}$ dépasse la limite U , la fonction φ n'est

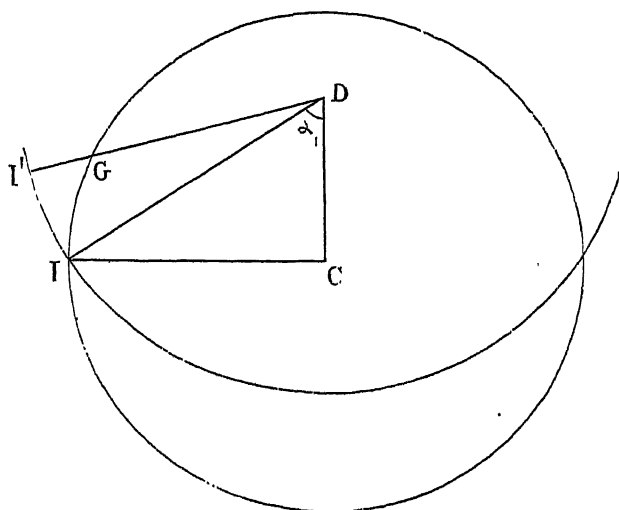


Fig. 6

plus représentée toujours par la fonction donnée, car elle est nulle pour les valeurs de $\sqrt{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2}$ qui dépassent U . Sur la figure 6, l'axe de l'hyperboloïde étant alors dirigé suivant une ligne telle que DI' , la fonction φ n'est représentée par la fonction considérée que si l'extrémité de la vitesse est entre D et G , elle est nulle si cette extrémité est entre G et I' .

Dans le cas où V est entre $U - H$ et $U + H$ nous devons donc diviser l'intégration de la formule 75 en deux parties. La première partie s'étend de $\alpha = 0$ à $\alpha = \alpha_1$, α_1 étant donné par

$$V^2 - 2VH \cos \alpha_1 + H^2 = U^2 \quad (76)$$

dans cette première partie on laissera V pour limite supérieure de v .

La seconde partie de l'intégration s'étend de $\alpha = \alpha_1$ à $\alpha = \pi$, et la limite supérieure de v dépend de α , en la désignant par l elle est donnée par l'équation

$$l^2 - 2lH \cos \alpha + H^2 = U^2$$

cette équation donne pour l deux valeurs, on voit sur la figure 6 que c'est la valeur positive qui convient, l est donc donnée par

$$l = H \cos \alpha + \sqrt{U^2 - H^2 \sin^2 \alpha} \quad (77)$$

Dans le cas considéré la formule 75 devient donc

$$J = \pi f q \int_0^{\alpha_1} \left(\int_0^v f(v, \alpha) dv \right) \sin \alpha d\alpha + \pi f q \int_{\alpha_1}^{\pi} \left(\int_0^l f(v, \alpha) dv \right) \sin \alpha d\alpha \quad (78)$$

Le cas $V = U + H$ se présente pour obtenir le nombre total des comètes visibles ⁽¹⁾, on a alors $\alpha_1 = 0$ et la formule 78 devient

$$J_2 = \pi f q \int_0^{\pi} \left(\int_0^l f(v, \alpha) dv \right) \sin \alpha d\alpha \quad (79)$$

Si V dépasse $U + H$, aux valeurs de v supérieures à $U + H$ ne correspondent jamais de comètes visibles pour aucune valeur de α , de sorte que le nombre des comètes visibles dont les vitesses sont inférieures à V est égal au nombre total et par conséquent donné encore par la formule 79.

23. — Il faut maintenant examiner le cas où, $\varphi(h)$ étant encore représentée par une fonction donnée jusqu'à $h = U$ et nulle ensuite, H serait supérieure à U , la figure 6 est alors remplacée par la figure 7. Nous désignerons encore l'angle CDI par α_1 , et menant du point D une tangente DT à la sphère de rayon U nous désignerons l'angle CDT par α_2 . Posons en outre

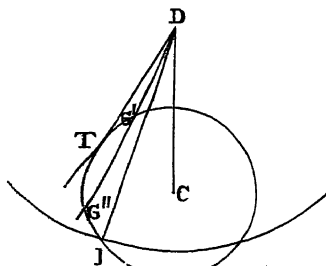


Fig. 7

(1) Nous représentons le nombre total des comètes visibles renfermées entre les deux sphères de rayons $r, r + dr$ par $J_2 dr$.

$$DG' = l_1 \qquad DG'' = l_2$$

Dans le cas que nous considérons il n'y a aucune comète visible pour laquelle la vitesse relative soit inférieur à $H - U$.

Si V est entre la tangente DT et $H + U$ on doit employer la formule

$$J = \pi f Q \int_0^{\alpha_1} \left(\int_{l_1}^V f(v, \alpha) dv \right) \sin \alpha d\alpha + \pi f Q \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_{l_1}^{l_2} f(v, \alpha) dv \right) \sin \alpha d\alpha \quad (80)$$

Si V est entre $H - U$ et DT il faut supprimer le second terme. Enfin si V est égale ou supérieure à $H + U$ l'angle α_1 devient nul, et la formule, qui dans ce cas donne le nombre total des comètes visibles, est :

$$J_1 = \pi f Q \int_0^{\alpha_2} \left(\int_{l_1}^{l_2} f(v, \alpha) dv \right) \sin \alpha d\alpha \quad (81)$$

l_1 et l_2 sont donnés par les équations

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= H \cos \alpha - \sqrt{U^2 - H^2 \sin^2 \alpha} \\ l_2 &= H \cos \alpha + \sqrt{U^2 - H^2 \sin^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

α_1 est donné par l'équation 76 et α_2 par

$$\sin \alpha_2 = \frac{U}{H}$$

Il est à remarquer que la supposition $H > U$ n'est guère admissible, car la vitesse du Soleil serait supérieure à toutes les vitesses des corps qui se meuvent dans les espaces interstellaires. Si la vitesse du Soleil surpassait ainsi toutes les vitesses des comètes que nous supposons

se mouvoir dans ces espaces, pour toutes les valeurs de α supérieures à l'angle CDT il n'y aurait aucune comète visible, il s'ensuit que toutes les comètes nous viendraient des points de l'espace situés dans une calotte de la sphère céleste et que de tous les autres points il n'en viendrait aucune.

24. — La méthode que nous avons employée n° 21 et qui nous a conduits à la formule 75 est la plus directe, mais on peut remplacer cette formule par une autre qui ne renferme qu'une seule intégration et qui lorsqu'on limite les vitesses à la valeur U n'exige pas l'emploi des formules compliquées des n°s 22 et 23. Pour cela remarquons d'abord que la formule 75 ne renferme pas r , donc le nombre J est indépendant de r , pourvu que cette distance soit grande, et pour obtenir J par n'importe quelle méthode nous pouvons supposer la distance r infiniment grande.

Cela posé, commençons par considérer seulement les comètes pour lesquelles la vitesse absolue h est comprise entre deux valeurs infiniment voisines h et $h + dh$, le nombre de ces comètes qui se trouvent dans l'unité de volume étant toujours représenté par $\varphi(h)dh$; et faisons abstraction pour un instant de toutes les autres comètes. Sur la figure 8, CD est encore la vitesse du Soleil transportée en C,

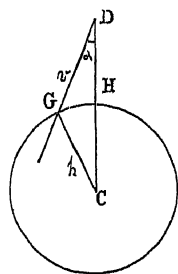


Fig. 8

le cercle de centre C représente la section par le plan de la figure de l'espace compris (1) entre deux sphères de rayons h , $h + dh$, la ligne droite DG représente l'hyperboloïde avec la direction qu'il a pour le point C, c'est-à-dire que l'angle CDG est égal à l'angle α que fait la vitesse du Soleil avec la droite qui va du Soleil au point C.

L'hyperboloïde découpe dans l'espace com-

(1) Pour ne pas compliquer la figure, je représente cette section infiniment mince par une simple ligne, et je fais de même pour l'hyperboloïde.

pris entre les sphères de rayon h et $h + dh$, au point G, un petit volume que nous allons évaluer. σ désignant la section droite de l'hyperboloïde au point G, et la lettre G désignant dans les formules l'angle CGD, ce volume est égal à (1)

$$\pm \frac{\sigma}{\cos G} dh$$

Dans le cas de la figure 8, l'angle G étant obtus il faut prendre le signe —, mais lorsque G est aigu il faut prendre le signe + afin que la valeur du volume considéré soit toujours positive.

Les extrémités des vitesses des comètes que nous considérons ici sont répandues dans le volume $4\pi h^2 dh$, compris entre deux sphères de rayons h et $h + dh$, elles sont uniformément répandues dans ce volume, parce que nous admettons que les vitesses sont également réparties dans toutes les directions. Les comètes visibles parmi ces comètes sont celles qui ont les extrémités de leurs vitesses dans le volume $\frac{\sigma}{\cos G} dh$, leur nombre dans l'unité de volume, est donc :

$$\varphi(h) dh \times \frac{\sigma}{\cos G} dh \times \frac{1}{4\pi h^2 dh} = \frac{1}{4\pi} \times \frac{\varphi(h)}{h^2} \times \frac{\sigma}{\cos G} dh \quad (83)$$

Dans cette formule $\cos G$ doit être pris en valeur absolue. En désignant par v la longueur DG, qui est la vitesse (2) relativement au Soleil des comètes visibles placées en C, le triangle CGD nous donne :

$$H^2 = h^2 - 2vh \cos G + v^2$$

d'où

$$\cos G = - \frac{H^2 - h^2 - v^2}{2vh}$$

(1) Comme nous admettons que r est infiniment grand, l'hyperboloïde est infiniment effilé.

(2) Les vitesses absolues étant ici toutes infiniment voisines d'une valeur unique h , les vitesses relatives des comètes visibles placées en C sont infiniment voisines d'une valeur v .

et la formule 83 devient

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\varphi(h)}{h} \frac{v\sigma}{H^2 - h^2 - v^2} dh \quad (84)$$

Cette expression devant toujours être positive, on prendra la quantité $H^2 - h^2 - v^2$ en valeur absolue.

La formule 84 joue le même rôle que la formule 69 du n° 21, mais ici les vitesses absolues étant toutes entre h et $h + dh$, les vitesses relatives des comètes visibles ont pour chaque point de l'espace une valeur unique, ou plutôt des valeurs infiniment peu différentes. Si maintenant nous voulons trouver le nombre Jdr des comètes visibles renfermées entre deux sphères de rayon r et $r + dr$, et pour lesquelles les vitesses relatives sont inférieures à une quantité donnée V , il faut suivre la même marche qu'au n° 21 pour passer de la formule 69 à la formule 75, c'est-à-dire qu'il faut multiplier la formule 84 par $2\pi r^2 \sin\alpha \, dr d\alpha$ et intégrer ensuite par rapport à la variable α seule, car ici $\varphi(h)$, h et dh sont des constantes. Pour cette intégration il ne faut pas oublier que v et σ sont des fonctions de α , de plus il faut choisir convenablement les limites de l'intégration. Laissant de côté pour un instant le choix de ces limites, nous pouvons dire que la quantité J , lorsque les vitesses absolues sont toutes entre deux valeurs infiniment voisines h et $h + dh$, est :

$$dh \times \frac{\varphi(h)}{h} \times r^2 \int \frac{v\sigma}{H^2 - h^2 - v^2} \sin\alpha \, d\alpha \quad (85)$$

$H^2 - h^2 - v^2$ doit être pris en valeur absolue, σ et v sont des fonctions de α , et les limites de l'intégration doivent être convenablement choisies.

Faisons un changement de variable, en prenant pour variable v au lieu de α , ces deux quantités sont liées par l'équation

$$v^2 - 2vH \cos\alpha + H^2 = h^2$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{v^2 + H^2 - h^2}{2vH}, \quad \sin\alpha \, d\alpha = \frac{H^2 - h^2 - v^2}{2v^2 H} dv$$

la formule 85 devient

$$dh \times \frac{\varphi(h)}{2Hh} r^2 \int \frac{\sigma}{v} dv \quad (86)$$

La valeur de σ en fonction de v , qui s'obtient sans peine au moyen de la quantité b (n° 21) est

$$\sigma = \pi b^2 = \frac{2\pi f q}{r^2} \left(1 + \frac{qv^2}{2f}\right)$$

et la formule 86 devient

$$dh \times \frac{\varphi(h)}{Hh} \times \pi f q \int \left(\frac{1}{v} + \frac{qv}{2f}\right) dv \quad (87)$$

Pour trouver les limites de l'intégration reportons nous à la formule 85 dans laquelle la variable indépendante est α . Supposons d'abord h inférieure à H , ce qui est le cas de la figure 8 ; si V est inférieure à la longueur de la tangente menée du point D à la sphère de rayon h , l'intégration doit partir de $\alpha = 0$ et aller jusqu'à la valeur de α pour laquelle v atteint la valeur V , donc par rapport à la variable v l'intégration va de $H - h$ à V . Si V est supérieure à la tangente menée du point D à la sphère du rayon h , à certaines valeurs de α correspondent deux points tels que G , les deux éléments correspondants de l'intégrale de la formule 85 sont exprimés par

$$\frac{v\sigma}{H^2 - h^2 - v^2} \sin \alpha \, d\alpha$$

mais v et σ n'ont pas les mêmes valeurs pour tous les deux, de plus il faut prendre chacun d'eux en valeur absolue. Lorsque nous avons pris v pour variable ces éléments sont devenus

$$\frac{\sigma}{2vH} dv$$

expression qui est positive à la seule condition que dv soit positive, il en résulte que dans la formule 87 on doit prendre pour limites de l'intégration $H - h$ et V .

Dans le cas $h > H$, la quantité $H^2 - h^2 - v^2$ est négative, il faut

donc la faire précéder du signe — dans la formule 85, mais au lieu de cela nous pouvons faire décroître α à partir de $\alpha = 2\pi$ jusqu'à la valeur qui correspond à $v = V$, dès lors dans la formule 87 il faut prendre comme limites de l'intégration $h - H$ et V .

On voit que dans tous les cas les limites de l'intégration de la formule 87 sont la quantité $H - h$ prise en valeur absolue et V , si V était inférieure à $H - h$ (en valeur absolue) l'expression 87 devrait être prise égale à zéro, enfin si V atteint ou surpasse $H + h$ on voit sans peine sur la figure 8 que pour limite supérieure de l'intégration il faut prendre non plus V mais $H + h$.

L'intégration de la formule 87 se fait maintenant sans difficulté et nous donne .

$$dh \times \frac{\varphi(h)}{Hh} \times \pi f q \left[Lv + \frac{qv^3}{4f} \right]_{\pm (H-h)}^V$$

nous désignerons cette expression par $f_1(h)dh$, le signe \pm disparaît dans v^3 , dans le logarithme on le fait disparaître aussi en remplaçant Lv par $\frac{1}{2} Lv^2$, nous avons donc dans tous les cas :

$$f_1(h)dh = \frac{\varphi(h)}{Hh} \pi f q \left[\frac{1}{2} Lv^2 + \frac{qV^3}{4f} - \frac{1}{2} L(H-h)^2 - \frac{q(H-h)^3}{4f} \right] dh \quad (88)$$

Si V surpasse $H + h$ il faut remplacer cette expression par la suivante, que nous désignons par $f_2(h)dh$:

$$f_2(h)dh = \frac{\varphi(h)}{Hh} \pi f q \left[\frac{1}{2} L(H+h)^2 + \frac{q(H+h)^3}{4f} - \frac{1}{2} L(H-h)^2 - \frac{q(H-h)^3}{4f} \right] dh \quad (89)$$

Dans le cas où toutes les vitesses absolues sont comprises entre deux valeurs infiniment voisines $h, h + dh$, ces expressions 88 et 89 multipliées par dr donnent le nombre des comètes visibles dont la vitesse relativement au Soleil est inférieure à V et qui sont placées entre deux sphères de rayons $r, r + dr$ ayant le Soleil pour

centre (1). On doit faire usage de la formule 88 ou 89 selon que V est inférieure ou supérieure à $H + h$, et lorsque V est inférieure à $H - h$, en valeur absolue, le nombre en question est nul. Maintenant au lieu de considérer seulement les vitesses absolues comprises entre h et $h + dh$, considérons toutes les valeurs de la vitesse absolue, et représentons toujours par Jdr le nombre des comètes visibles dont les vitesses relatives sont inférieures à V et qui sont entre deux sphères de rayons $r, r + dr$; les formules 88 ou 89 donnent la différentielle de J considéré comme fonction de h , la valeur de cette différentielle suivant les cas peut donc être résumée dans le tableau suivant :

$V < \pm (H - h)$	zéro
$\pm (H - h) < V < (H + h)$	$f_1(h) dh$
$V > (H + h)$	$f_2(h) dh$

Pour obtenir J nous n'avons qu'à intégrer sa différentielle, la seule difficulté consiste à bien prendre pour chaque valeur de h la valeur convenable de la différentielle.

Nous distinguerons deux cas (2) :

1° $V < H$, dans ce cas V sera toujours inférieure à $H + h$, il n'y aura donc jamais à faire usage de la formule 89. Tant que $h < H - V$ la quantité V est inférieure à $H - h$ et la différentielle de J est nulle, lorsque h est entre $H - V$ et $H + V$ cette différentielle est donnée par la formule 88, et enfin lorsque h dépasse $H + V$ la quantité V est inférieure à $h - H$ et la différentielle est encore nulle, nous avons donc

$$J = \int_{H-V}^{H+V} f_1(h) dh \quad (90)$$

(1) On pourrait obtenir aussi ces expressions en différentiant par rapport à U les formules des nos 22 et 23, mais comme les limites des intégrales varient, cette méthode ne serait pas plus simple que celle que nous donnons.

(2) Pour les considérations qui suivent, on peut s'aider de figures analogues à la figure 8.

2° $V > H$, tant que $h < V - H$ la quantité V est supérieure à $H + h$ et la différentielle de J est donnée par la formule 89. Lorsque h est entre $V - H$ et $V + H$ il faudra, comme dans le premier cas, faire usage de la formule 88, enfin lorsque h dépasse $V + H$, V devient inférieure à $h - H$ et la différentielle de J est nulle; donc lorsque $V > H$, J est donné par la formule

$$J = \int_0^{V-H} f_2(h) dh + \int_{V-H}^{V+H} f_1(h) dh \quad (91)$$

Remarquons que

$$\int_0^{V-H} f_2(h) dh = \int_{H-V}^{V-H} f_1(h) dh$$

car si dans la formule 88 nous changeons h en $-h$, et posons $\varphi(-h) = \varphi(h)$, elle devient

$$\frac{\varphi(h)}{Hh} \pi f g \left[-\frac{1}{2} L V^2 - \frac{g V^2}{4f} + \frac{1}{2} L (H + h)^2 + \frac{g(H + h)^2}{4f} \right]$$

expression qui ajoutée à la formule 88 non changée donne la formule 89.

Il s'ensuit que la formule 90 convient à tous les cas, à la condition que nous regardions $\varphi(-h)$ comme égale à $\varphi(h)$.

Nous devons encore chercher le nombre total des comètes visibles renfermées entre deux sphères de rayons r , $r + dr$, ce nombre a été désigné par $J_2 dr$; la différentielle de J_2 est donnée par la formule 89, il suffit donc d'intégrer cette formule, comme limite inférieure on doit prendre zéro et pour limite supérieure on peut prendre soit la limite supérieure des vitesses absolues, soit l'infini, puisqu'au-delà de la limite supérieure des vitesses les éléments de l'intégrale deviennent tous nuls, la fonction $\varphi(h)$ devenant nulle, nous avons donc

$$J_2 = \int_0^{\infty} f_2(h) dh \quad (92)$$

Les formules 90 et 92 sont plus simples que la formule 75, car elles ne renferment qu'une seule intégration. De plus la variable étant h , la difficulté que nous avons signalée nos 22 et 23 est ici facile à résoudre ; lorsque $\varphi(h)$ est représentée par une fonction donnée jusqu'à une limite U et nulle ensuite, il suffit de donner à $f_1(h)$ et $f_2(h)$ la valeur zéro quand h dépasse U . Par conséquent dans le cas $U > H$ si $H + V$ dépasse U , c'est-à-dire si $V > U - H$ il faudra dans la formule 90 prendre U pour limite supérieure de l'intégration au lieu de $H + V$. Si la limite inférieure $H - V$ est positive elle est forcément inférieure à U ; si elle est négative et supérieure en valeur absolue à U , c'est-à-dire si $V > U + H$, il faudra la remplacer par $-U$, comme alors on a aussi $V > U - H$ les limites de l'intégration sont $-U$ et $+U$ et le nombre donné par la formule 90 est le nombre total des comètes visibles, il est en effet le même que celui donné par la formule 92 avec 0 et U pour limites. On voit donc que dans le cas $U > H$ la formule 90 devra être appliquée sans changements si $V < U - H$, si V est entre $U - H$ et $U + H$ il faut prendre U pour limite supérieure, si $V > U + H$ il faut prendre pour limites $-U$ et $+U$.

Dans le cas $U < H$ on a toujours $H + V > U$, on doit donc arrêter l'intégration à la limite U . Si $H - V$ est négative et supérieure en valeur absolue à U , c'est-à-dire si $V > U + H$, il faut prendre $-U$ pour limite inférieure. Enfin si $H - V$ est positive et supérieure à U , c'est-à-dire si $V < H - U$, le nombre J est nul. Donc dans le cas $U < H$, si $V < H - U$ J est nul, si V est entre $H - U$ et $H + U$ il faut prendre U pour limite supérieure, si $V > H + U$ il faut prendre pour limites $-U$ et $+U$.

Dans la formule 92 il suffit de prendre U pour limite supérieure.

Conséquences des formules lorsqu'on tient compte du mouvement du Soleil.

25. — Nous voyons d'abord que J ne dépend pas de r , ce qu'on peut exprimer en disant que de toutes les distances il nous vient le

même nombre de comètes dont le grand axe est inférieur à une quantité donnée, et par conséquent aussi le même nombre total de comètes.

Les formules nous apprennent ensuite que, quelle que soit la fonction $\varphi(h)$, le nombre des comètes elliptiques est nul, ou plutôt infiniment petit, relativement à celui des comètes hyperboliques. En effet pour avoir le nombre des comètes visibles elliptiques il faut, dans la formule 75, prendre V égale à la vitesse parabolique à la distance r , cette vitesse est extrêmement petite et tend vers zéro lorsque r augmente indéfiniment. La limite supérieure de la première intégration à effectuer dans la formule 75 étant alors infiniment voisine de la limite inférieure zéro, la valeur de l'intégrale est infiniment voisine de zéro (1), et à la seconde intégration tous les éléments étant nuls on trouve pour J une valeur nulle.

Cependant avec les formules qui ne tenaient pas compte du mouvement du Soleil, cette diminution de la limite V de l'intégration, n'entraînait pas toujours pour l'intégrale une valeur très petite, mais c'est parce que si l'on suppose la vitesse du Soleil nulle et la fonction $\varphi(h)$ constante, l'intégrale relative à v dans la formule 75 devient

$$\varphi(h) \int_0^V \left(\frac{1}{v^3} + \frac{q^2}{2r} \right) dv$$

le terme $\frac{1}{v^3}$ donne par l'intégration $\frac{1}{v}$ quantité qui pour $v = 0$ est infinie. Il y a donc alors une discontinuité qui n'existe plus lorsque v^2 est remplacé par $v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2$.

La formule 90 du n° 24 nous conduit aussi au même résultat, une petite difficulté se présente parce que $f_1(h)$ est infinie pour $h = H$, mais elle est facile à résoudre. Lorsque V tend vers zéro

(1) Cette valeur lorsque V est infiniment petite se réduit à la dérivée pour le cas $V = 0$ multipliée par V , c'est à dire à $\frac{\varphi(H)}{H^2} V$.

les limites $H - V$ et $H + V$ tendent l'une et l'autre vers H , en examinant la valeur de $f_1(h)$ (formule 88) nous voyons que les deux termes $\frac{qV^2}{4f}$ et $\frac{q(H-h)^2}{4f}$ tendent vers zéro avec V , supprimant ces termes la formule 90 devient

$$J = \frac{\pi f q}{2H} \int_{H-V}^{H+V} \frac{\varphi(h)}{h} [LV^2 - L(H-h)^2] dh$$

lorsque V tend vers zéro h ne varie plus qu'entre des limites infiniment peu différentes de H , de sorte que $\frac{\varphi(h)}{h}$ qui ne varie pas brusquement pour $h = H$ peut être traité comme une constante et retiré du signe d'intégration. La valeur de J devient alors

$$J = \frac{\pi f q}{2H} \frac{\varphi(H)}{H} \int_{H-V}^{H+V} [LV^2 - L(H-h)^2] dh$$

ou bien ⁽¹⁾

$$J = \frac{\pi f q}{2H} \frac{\varphi(H)}{H} \times 4V$$

cette quantité tend vers zéro en même temps que V .

Mais si l'on suppose que la vitesse du Soleil H est nulle, h tendant alors vers zéro avec V , la quantité $\frac{\varphi(h)}{h}$ ne peut plus être traitée comme une constante, et J n'est pas nécessairement très petit pour de très petites valeurs de V .

D'un autre côté le volume de l'hyperboloïde qui correspond aux orbites elliptiques étant limité par une sphère de rayon $\sqrt{\frac{2f}{r}}$ est extrêmement petit relativement à celui qui correspond aux orbites hyperboliques, et les vitesses absolues qui correspondent à ces deux genres d'orbites sont ici du même ordre de grandeur; on voit donc

(1) $\int LV^2 dh = hLV^2 + C$; $\int L(H-h)^2 dh = 2(H-h) - (H-h)L(H-h)^2 + C$

évidemment que lorsqu'on tient compte du mouvement du Soleil les orbites, à part des exceptions extrêmement rares, seront toutes des hyperboles, et cela quelle que soit la fonction $\varphi(h)$.

Ce résultat est tout opposé à celui obtenu n° 10 pour le cas où la vitesse du Soleil est nulle. On peut se rendre compte par un raisonnement géométrique de la raison pour laquelle dans ce cas les orbites hyperboliques peuvent être rares. Si l'on suppose la vitesse du Soleil nulle l'hyperboloïde a son centre au point C, lorsque les vitesses sont extrêmement petites cet hyperboloïde bien que très effilé en prend dans son intérieur une fraction très sensible du nombre total, la totalité même lorsque les vitesses sont plus petites que son axe réel ; lorsque les vitesses sont grandes au contraire, l'hyperboloïde n'en prend dans son intérieur qu'une fraction extrêmement petite du total. Cette circonstance peut compenser la petitesse du volume qui correspond aux orbites elliptiques. Evidemment rien de semblable n'a lieu lorsqu'on tient compte du mouvement du Soleil.

Pour résumer, nous voyons que si le Soleil est en mouvement dans l'espace, ce mouvement fût-il même faible, et que les comètes nous viennent des espaces interstellaires, ces astres doivent tous décrire des hyperboles. Quant à savoir si ces hyperboles diffèrent plus ou moins de la parabole, cela dépend de la vitesse plus ou moins grande du Soleil et de la fonction $\varphi(h)$. Nous allons donc maintenant faire des hypothèses sur cette fonction.

26. — Cherchons le nombre des comètes visibles sensiblement hyperboliques lorsqu'on admet la supposition, faite aux nos 10 et 16, que les vitesses sont comprises entre zéro et une limite U et que la fonction $\varphi(h)$ est une constante dans cet intervalle. Dans ce cas la formule 90 qui donne le nombre des comètes visibles dont la vitesse est inférieure à V devient :

$$J = \frac{\pi f q \varphi}{2H} \int_{H-V}^{H+V} \left[\frac{LV^2}{h} + \frac{qV^2}{2fh} - \frac{q(H-h)^2}{2fh} - \frac{L(H-h)^2}{h} \right] dh$$

les trois premiers termes s'intègrent sans difficulté et nous trouvons (1) :

$$J \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = \frac{1}{2} \left[L V^2 + \frac{q(V^2 - H^2)}{2f} \right] L \left(\frac{H+V}{H-V} \right)^2 + \frac{qHV}{f} - \int_{H-V}^{H+V} \frac{L(H-h)^2}{h} dh \quad (93)$$

Cette formule ne devra être appliquée que si $V < U - H$, dans les autres cas il faut se conformer pour les limites des intégrations à ce qui a été dit à la fin du n° 24.

Le dernier terme ne pouvant pas être intégré, nous allons le développer en série.

$$\begin{aligned} \int_{H-V}^{H+V} \frac{L(H-h)^2}{h} dh &= \int_{H-V}^{H+V} \frac{L H^2 + L \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2}{h} dh \\ &= \frac{1}{2} L H^2 \times L \left(\frac{H+V}{H-V} \right)^2 + \int_{H-V}^{H+V} \frac{L \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2}{h} dh \end{aligned} \quad (94)$$

posons

$$1 - \frac{h}{H} = x$$

d'où

$$h = H(1 - x) \quad dh = -Hdx$$

(1) Je mets $\frac{1}{2} L \left(\frac{H+V}{H-V} \right)^2$ pour éviter de distinguer deux cas selon que V est inférieure ou supérieure à H . Dans le cas $V > H$ la quantité $\frac{1}{h}$ devient infinie lorsque h passe par la valeur zéro, cette difficulté se résout en remarquant que $\frac{dh}{h}$ change de signe avec h , donc

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dh}{h} = \int_{+a}^{+b} \frac{dh}{h} = L \frac{b}{a} = \frac{1}{2} L \left(\frac{b}{-a} \right)^2$$

alors

$$\int_{\frac{H-V}{h}}^{\frac{H+V}{h}} \frac{L \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2}{h} dh = - \int_{+\frac{V}{H}}^{-\frac{V}{H}} \frac{Lx^2}{1-x} dx = 4 \int_0^{\frac{V}{H}} \frac{Lx}{1-x^2} dx \quad (95)$$

En tenant compte des formules 94 et 95, la formule 93 devient

$$J \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = \frac{1}{2} \left[L \frac{V^2}{H^2} + \frac{q(V^2 - H^2)}{2f} \right] L \left(\frac{H+V}{H-V} \right)^2 + \frac{qHV}{f} - 4 \int_0^{\frac{V}{H}} \frac{Lx}{1-x^2} dx \quad (96)$$

Supposons d'abord $\frac{V}{H} < 1$, nous avons

$$\int_0^x \frac{Lx}{1-x^2} dx = \int_0^x Lx(1+x^2+x^4+\dots) dx$$

et en intégrant :

$$\int_0^x \frac{Lx}{1-x^2} dx = Lx \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right) \quad (97)$$

Dans le calcul de ces séries si on s'arrête à un terme quelconque, le reste est inférieur au dernier terme calculé multiplié par

$$x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{x^2}{1-x^2}$$

Si $\frac{V}{H} > 1$ on calculera le dernier terme de la formule 96 comme il suit :

$$\int_0^{\frac{V}{H}} \frac{Lx}{1-x^2} dx = \int_0^1 \frac{Lx}{1-x^2} dx + \int_1^{\frac{V}{H}} \frac{Lx}{1-x^2} dx$$

posons

$$x = \frac{1}{y} \quad dx = -\frac{dy}{y^2}$$

alors :

$$\int_1^{\frac{V}{H}} \frac{Lx}{1-x^2} dx = \int_{\frac{H}{V}}^1 \frac{Ly}{1-y^2} dy = \int_0^1 \frac{Ly}{1-y^2} dy - \int_0^{\frac{H}{V}} \frac{Ly}{1-y^2} dy$$

on sait que (1)

$$\int_0^1 \frac{Lx}{1-x^2} dx = \int_0^1 \frac{Ly}{1-y^2} dy = -\frac{\pi^2}{8}$$

on trouve donc finalement

$$\int_0^{\frac{V}{H}} \frac{Lx}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\frac{H}{V}} \frac{Ly}{1-y^2} dy \quad (98)$$

comme $\frac{H}{V} < 1$ on achève le calcul avec la formule 97.

Il faut maintenant calculer J_2 , dans le cas considéré la formule 92 devient :

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{\pi f q \varphi}{2H} \int_0^U \left[\frac{2qH}{f} + \frac{1}{h} L \left(\frac{H+h}{H-h} \right)^2 \right] dh \\ &= \frac{\pi f q \varphi}{2H} \times \frac{2qHU}{f} + \frac{\pi f q \varphi}{2H} \int_0^U \frac{1}{h} L \left(\frac{H+h}{H-h} \right)^2 dh \end{aligned} \quad (99)$$

(1) Voir le *Calcul intégral* de M. BERTRAND, p. 142.

Nous allons développer le dernier terme en série, pour cela divisons le en deux parties (nous admettons $U > H$) :

$$\int_0^U \frac{1}{h} L \left(\frac{H+h}{H-h} \right)^2 dh = \int_0^H \frac{1}{h} L \left(\frac{H+h}{H-h} \right)^2 dh + \int_H^U \frac{1}{h} L \left(\frac{H+h}{H-h} \right)^2 dh \quad (100)$$

pour calculer le premier terme de cette formule posons

$$\frac{h}{H} = x$$

d'où

$$h = Hx$$

$$dh = Hdx$$

$$\int_0^H \frac{1}{h} L \left(\frac{H+h}{H-h} \right)^2 dh = \int_0^1 \frac{1}{x} L \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2 dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{x} L \frac{1+x}{1-x} dx$$

nous avons pour $x < 1$:

$$\frac{1}{2} L \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

divisant par x et intégrant nous trouvons

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} L \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} + \frac{x^7}{7^2} + \dots + C \quad (101)$$

et prenant pour limites 0 et 1

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x} L \frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \quad (102)$$

cette série est convergente et sa valeur (1) est $\frac{\pi^2}{8}$.

(1) Voir le *Calcul Différentiel* de M. BERTRAND, p. 423.

Pour obtenir le second terme de la formule 100, posons

$$\frac{H}{h} = x$$

d'où

$$h = \frac{H}{x} \qquad dh = -\frac{H}{x^2} dx$$

nous avons alors :

$$\int_H^U \frac{1}{h} L \left(\frac{H+h}{H-h} \right)^2 dh = 2 \int_H^U \frac{1}{h} L \frac{1 + \frac{H}{h}}{1 - \frac{H}{h}} dh = 2 \int_{\frac{H}{U}}^1 \frac{1}{x} L \frac{1+x}{1-x} dx$$

La variable x se trouvant toujours entre 0 et 1, la formule 101 peut être appliquée, et donne

$$\frac{1}{4} \int_H^U \frac{1}{h} L \left(\frac{H+h}{H-h} \right)^2 dh = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots - \frac{H}{U} - \frac{1}{3^2} \left(\frac{H}{U} \right)^3 - \frac{1}{5^2} \left(\frac{H}{U} \right)^5 - \dots$$

D'après les formules 100 et suivantes la formule 99 devient :

$$J_2 \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = \pi^2 + \frac{2qHU}{f} - 4 \left[\frac{H}{U} + \frac{1}{3^2} \left(\frac{H}{U} \right)^3 + \frac{1}{5^2} \left(\frac{H}{U} \right)^5 + \dots \right] \quad (103)$$

comme $\frac{H}{U}$ est plus petit que 1, la série que renferme cette formule est convergente; en prenant seulement quelques termes pour le calcul numérique nous aurons une valeur approchée par défaut,

si nous nous arrêtons au terme $\frac{1}{(2n-1)^2} \left(\frac{H}{U} \right)^{2n-1}$ le reste est plus petit que

$$\frac{1}{(2n+1)^2} \left(\frac{H}{U} \right)^{2n+1} \left[1 + \left(\frac{H}{U} \right)^2 + \left(\frac{H}{U} \right)^4 + \dots \right]$$

ou, en faisant la somme de la progression géométrique entre crochets

$$\frac{1}{(2n+1)^2} \left(\frac{H}{U} \right)^{2n+1} \frac{1}{1 - \left(\frac{H}{U} \right)^2} \quad (104)$$

Lorsque $\frac{H}{U}$ est voisin de 1, cette limite du reste devient grande, il faut par conséquent une autre formule. Nous pouvons écrire le reste de la série

$$\left[\frac{1}{(2n+1)^2} \left(\frac{H}{U}\right)^{2n+1} + \frac{1}{(2n+3)^2} \left(\frac{H}{U}\right)^{2n+3} + \dots \right] + \left[\frac{1}{(4n+1)^2} \left(\frac{H}{U}\right)^{4n+1} + \frac{1}{(4n+3)^2} \left(\frac{H}{U}\right)^{4n+3} + \dots \right] + \left[\frac{1}{(8n+1)^2} \left(\frac{H}{U}\right)^{8n+1} + \dots \right] + \dots$$

Le premier groupe renferme n termes tous inférieurs à $\frac{1}{(2n)^2} \left(\frac{H}{U}\right)^{2n+1}$,

il est donc inférieur à $\frac{1}{4n} \left(\frac{H}{U}\right)^{2n+1}$, pour passer du premier groupe au second il faut changer n en $2n$ et ainsi de suite, on voit alors sans peine que le reste est inférieur à

$$\frac{1}{4n} \left(\frac{H}{U}\right)^{2n+1} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{U}\right)^{2n} + \frac{1}{2^2} \left(\frac{H}{U}\right)^{4n} + \dots \right]$$

ou

$$\frac{1}{4n} \left(\frac{H}{U}\right)^{2n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{U}\right)^{2n}} \quad (105)$$

Nous avons maintenant les formules nécessaires au calcul de J et J_2 .

Calculons les valeurs numériques de ces quantités en supposant, d'après Struve, $H = 0,25$. La vitesse de la Terre dans son orbite étant prise pour unité. Pour V nous adopterons 0,1 vitesse limite dans une orbite de demi grand axe — 100 R, pour U nous ferons encore successivement les hypothèses $U = 1, 10, 100$, enfin nous prendrons toujours $q = 2$ comme aux nos 10, 16 et 19.

Au moyen des formules 96 et 97 nous trouvons .

$$J \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = 1,63575$$

la formule 103 donne pour $J_2 \times \frac{2H}{\pi f q \varphi}$ les valeurs suivantes :

U	
1	9,86250
10	19,76959
100	109,85960

Nous obtenons alors pour le rapport entre le nombre des comètes qui ne sont pas sensiblement hyperboliques et le nombre de celles qui le sont (1), rapport qui est égal à $\frac{J}{J_2 - J}$, les valeurs suivantes :

U	
1	0,1988
10	0,0902
100	0,0151

D'après ces nombres il devrait y avoir peu de comètes non sensiblement hyperboliques ; pour $U = 1$ par exemple, il y a à très peu près cinq fois plus de comètes avec demi grand axe inférieur qu'avec demi grand axe supérieur à 100 R (en valeur absolue).

Pour le nombre total absolu des comètes visibles, il suffit de reprendre ce qui a été dit nos 16 et 19. J_2 représentant encore le nombre des comètes visibles renfermées entre deux sphères de rayons $r, r + 1$ ayant le Soleil pour centre et N_2 le nombre de toutes les comètes renfermées dans l'unité de volume, nous avons ici, en désignant par N la valeur du second membre de la formule 103 que nous venons de calculer,

(1) Nous appelons comme précédemment orbites sensiblement hyperboliques celles dont le demi grand axe est inférieur, en valeur absolue, à 100 fois le rayon de l'orbite terrestre.

$$J_2 = \frac{\pi f q \varphi}{2H} N$$

la valeur de N_2 est la même qu'au n° 16, donc

$$\frac{J_2}{N_2} = \frac{\pi f q}{2HU} N \quad (106)$$

puisque $q = 2$, $f = 1$, on a simplement $\pi f q = 2\pi$, et on trouve pour $\frac{J_2}{N_2}$ les valeurs suivantes

U	
1	123,936
10	24,843
100	13,805

27. — On peut aussi déduire les nombres précédents de la formule 75, ce calcul montrera un exemple de l'application de cette formule et sera une vérification. Dans le cas où les vitesses sont comprises entre zéro et une limite supérieure U, et où la fonction φ est une constante, la formule 75 devient

$$J = \pi f q \varphi \int_0^\pi \left(\int_0^v \frac{1 + \frac{qv^2}{2f}}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} dv \right) \sin \alpha d\alpha \quad (107)$$

Les formules 78 et 79 subissent la même transformation, la constante φ sort du signe \int . L'intégration par rapport à la variable v peut alors être effectuée, car la fonction placée sous le signe \int est une fonction rationnelle, en suivant les règles d'intégration de ces fonctions on trouve ⁽¹⁾ :

(1) On peut aussi intervertir l'ordre des deux intégrations dans la formule 107, car les limites sont des constantes, et effectuer d'abord l'intégration relative à α par la formule

$$\int \frac{\sin \alpha}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} d\alpha = \frac{1}{2vH} L(v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2) + C$$

$$\int \frac{1 + \frac{qv^2}{2f}}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} dv = \left| \begin{aligned} &+ \frac{qH}{2f} \cos \alpha L(v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2) \\ &+ \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{qH \cos^2 \alpha}{f} - \frac{qH}{2f} + \frac{1}{H} \right) \operatorname{arctg} \frac{v - H \cos \alpha}{H \sin \alpha} \\ &+ \frac{q}{2f} v + C \end{aligned} \right. \quad (108)$$

En prenant pour limites 0 et V, et multipliant par $\sin \alpha d\alpha$, la formule 107 devient :

$$J \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = \left| \begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{qH^2}{2f} \sin 2\alpha L \frac{V^2 - 2VH \cos \alpha + H^2}{H^2} d\alpha \\ &+ \int_0^\pi \left(\frac{qH^2}{f} \cos 2\alpha + 2 \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{V - H \cos \alpha}{H \sin \alpha} + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) d\alpha \\ &+ \frac{qH}{f} V \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \end{aligned} \right.$$

Le terme

$$\int_0^\pi \left(\frac{qH^2}{f} \cos 2\alpha + 2 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) d\alpha$$

est nul, comme on le voit soit en effectuant l'intégration, soit simplement en remarquant que les éléments qui correspondent à α et $\pi - \alpha$ sont égaux et de signes contraires. En outre

$$\int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = 2$$

Nous obtenons alors

$$J \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = \left| \begin{aligned} & \int_0^{\pi} \frac{qH^2}{2f} \sin 2\alpha L \frac{V^2 - 2VH \cos \alpha + H^2}{H^2} d\alpha \\ & + \int_0^{\pi} \left(\frac{qH^2}{f} \cos 2\alpha + 2 \right) \operatorname{arctg} \frac{V - H \cos \alpha}{H \sin \alpha} d\alpha \\ & + \frac{2qHV}{f} \end{aligned} \right. \quad (109)$$

Dans le cas où $f = 1$, $q = 2$, $H = 0,25$, $V = 0,1$ cette formule devient

$$J \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = \left| \begin{aligned} & \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\alpha}{16} L (1,16 - 0,8 \cos \alpha) d\alpha \\ & + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{8} \cos 2\alpha + 2 \right) \operatorname{arctg} \frac{0,4 - \cos \alpha}{\sin \alpha} d\alpha \\ & + 0,1 \end{aligned} \right. \quad (110)$$

On effectuera les deux intégrations au moyen d'une formule approchée, celle de Simpson par exemple ; de cette façon j'ai trouvé pour valeur numérique de la formule 110

$$J \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = 1,63575$$

nombre identique à celui obtenu au n° précédent par une méthode toute différente.

Pour calculer J_2 par la formule 75, il faut (n° 22), après avoir effectué l'intégration par rapport à v (formule 108), remplacer v par la quantité l ; nous trouvons ainsi :

$$J_2 \times \frac{2H}{\pi/q\varphi} = \left| \begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{qH^2}{f} L \frac{U}{H} \sin 2\alpha \, d\alpha \\ & + \int_0^\pi \left(\frac{qH^2}{f} \cos 2\alpha + 2 \right) \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{U^2}{H^2 \sin^2 \alpha} - 1} + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) d\alpha \\ & + \frac{qH}{f} \int_0^\pi l \sin \alpha \, d\alpha \end{aligned} \right. \quad (111)$$

Cette formule se simplifie ; nous avons d'abord

$$\int_0^\pi \sin 2\alpha \, d\alpha = 0 \qquad \int_0^\pi \left(\frac{qH^2}{f} \cos 2\alpha + 2 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) d\alpha =$$

ensuite

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{U^2}{H^2 \sin^2 \alpha} - 1} = \arccos \frac{H \sin \alpha}{U}$$

Enfin, dans le dernier terme de la formule 111 nous ferons un changement de variable, en prenant l pour nouvelle variable. L'équation qui lie l à α nous donne

$$\cos \alpha = \frac{l^2 + H^2 - U^2}{2Hl} \qquad - \sin \alpha \, d\alpha = \frac{l^2 + U^2 - H^2}{2Hl^2} dl$$

de sorte que

$$2H \int_0^\pi l \sin \alpha \, d\alpha = \int_{U-H}^{U+H} \frac{l^2 + U^2 - H^2}{l} dl = 2HU + (U^2 - H^2) L \frac{U+H}{U-H}$$

La formule 111 devient maintenant

$$J_2 \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = \int_0^{\pi} \left(\frac{qH^2}{f} \cos 2\alpha + 2 \right) \arccos \frac{H \sin \alpha}{U} d\alpha + \frac{qHU}{f} + \frac{q(U^2 - H^2)}{2f} L \frac{U + H}{U - H} \quad (112)$$

Avec $H = 0,25$, $q = 2$, $f = 1$, on a donc

$$J_2 \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{8} \cos 2\alpha + 2 \right) \arccos \frac{\sin \alpha}{4U} d\alpha + \frac{U}{2} + \left(U^2 - \frac{1}{16} \right) L \frac{4U + 1}{4U - 1} \quad (113)$$

L'intégrale du premier terme se calculera par une méthode approchée. Par la formule 113 j'ai trouvé pour $J_2 \times \frac{2H}{\pi f q \varphi}$ les valeurs suivantes :

U	
1	9,8626
10	19,7696
100	109,8596

qui sont parfaitement d'accord avec celles calculées (n° 26) au moyen de la formule 103.

28. — Nous avons dit n° 11 que suivant M. Schiaparelli les orbites dont le demi grand axe est $-\frac{f}{H^2}$, donc celles pour lesquelles la vitesse initiale est H, doivent être plus nombreuses que toutes les autres et donner pour ainsi dire la forme typique ou moyenne des orbites, nous allons examiner cette proposition (1).

Pour avoir le nombre des comètes visibles dont les vitesses initiales sont entre deux valeurs très voisines V, V + dV il suffit

(1) Voir aussi à ce sujet chapitre II, n° 50.

de différentier la formule 75 par rapport à V , ce qui lorsque φ est une constante donne :

$$dV \times \pi f q \varphi \left(1 + \frac{qV^2}{2f}\right) \int_0^\pi \frac{\sin \alpha}{V^2 - 2VH \cos \alpha + H^2} d\alpha \quad (114)$$

l'intégration peut s'effectuer, car

$$\int \frac{\sin \alpha}{V^2 - 2VH \cos \alpha + H^2} d\alpha = \frac{1}{2VH} L(V^2 - 2VH \cos \alpha + H^2) + C$$

en prenant pour limites 0 et π la formule 114 devient :

$$dV \times \frac{\pi f q \varphi}{2VH} \left(1 + \frac{qV^2}{2f}\right) L\left(\frac{V+H}{V-H}\right)^2 \quad (115)$$

On voit que lorsque la vitesse initiale est très voisine de H le terme qui multiplie dV est très grand, le nombre des comètes visibles dont les vitesses initiales sont comprises entre les deux limites $H \pm \varepsilon$ est donc très grand relativement au nombre des comètes visibles dont les vitesses initiales sont entre les limites $V \pm \varepsilon$, V désignant une valeur quelconque de la vitesse et ε une très petite quantité. En rendant ε suffisamment petit on pourra rendre le rapport de ces deux nombres aussi grand qu'on voudra ; mais il n'en résulte pas nécessairement que les comètes visibles pour lesquelles la vitesse initiale est entre les limites $H \pm \varepsilon$ sont en majorité parmi la totalité des comètes visibles.

Pour avoir le nombre des comètes visibles dont les vitesses initiales sont entre $H \pm \varepsilon$ il faut intégrer la formule 115 de $V = H - \varepsilon$ à $V = H + \varepsilon$, ce qui donne

$$\frac{\pi f q \varphi}{2H} \int_{H-\varepsilon}^{H+\varepsilon} \frac{1 + \frac{qV^2}{2f}}{V} L(V+H)^2 dV - \frac{\pi f q \varphi}{2H} \int_{H-\varepsilon}^{H+\varepsilon} \frac{1 + \frac{qV^2}{2f}}{V} L(V-H)^2 dV \quad (116)$$

Lorsque V varie de $H - \varepsilon$ à $H + \varepsilon$, ε étant petit, les quantités $\frac{1 + \frac{qV^2}{2f}}{V}$ et $L(V + H)^2$ varient très peu, nous obtenons donc une valeur très approchée de la formule 116 en les regardant comme constantes et égales à la valeur qu'elles prennent pour $V = H$, la formule 116 devient alors :

$$2\varepsilon \frac{\pi f q \varphi}{H^2} \left(1 + \frac{qH^2}{2f}\right) L 2H - \frac{\pi f q \varphi}{2H^2} \left(1 + \frac{qH^2}{2f}\right) \int_{H-\varepsilon}^{H+\varepsilon} L(V-H)^2 dV \quad (117)$$

pour effectuer l'intégration du dernier terme posons $V - H = x$, d'où (1)

$$\int_{H-\varepsilon}^{H+\varepsilon} L(V-H)^2 dV = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} L x^2 dx = 4 \int_0^{\varepsilon} L x dx = 4\varepsilon(L\varepsilon - 1)$$

et la formule 117 devient

$$\frac{2\pi f q \varphi}{H^2} \left(1 + \frac{qH^2}{2f}\right) (L 2H - L\varepsilon + 1)\varepsilon \quad (118)$$

Tel est le nombre des comètes visibles dont les vitesses initiales sont entre les limites $H \pm \varepsilon$, on voit que ce nombre tend vers zéro avec ε , mais si ε est très petit il est très grand relativement au nombre des comètes visibles dont les vitesses sont entre les limites $V \pm \varepsilon$, lequel, donné par la formule 115 en remplaçant dV par 2ε , est égal à

$$\frac{\pi f q \varphi}{VH} \left(1 + \frac{qV^2}{2f}\right) [L(V+H)^2 - L(V-H)^2]\varepsilon \quad (119)$$

Il est à remarquer que le rapport des expressions 118 et 119

(1) $\int L x dx = x(Lx - 1) + C$, pour $x = 0$ la vraie valeur de $x(Lx - 1)$ est zéro.

devient infini pour $\varepsilon = 0$ à cause de $-L\varepsilon$, comme un logarithme varie lentement lorsque le nombre décroît, il faudra que ε soit très petit pour que ce rapport soit très grand; surtout si V est grande parce qu'alors la valeur des termes qui multiplient ε dans la formule 119 devient grande.

En faisant par exemple $\varepsilon = 0,01$ et conservant comme précédemment $q = 2$, $f = 1$, $H = 0,25$ le rapport de la formule 118 à la formule 119 est :

$$\frac{2V}{H} \times \frac{1 + H^2}{1 + V^2} \times \frac{L2H - L\varepsilon + 1}{L(V + H)^2 - L(V - H)^2} = 8V \times \frac{1,0625}{1 + V^2} \times \frac{4,9120}{L(V + H)^2 - L(V - H)^2}$$

pour $V = 1$ par exemple cette expression a pour valeur 20,435; il y a donc 20 fois plus de comètes visibles avec vitesses initiales entre 0,26 et 0,27 qu'entre 0,99 et 1,01.

Comparons le nombre total des comètes visibles au nombre de celles dont les vitesses initiales sont entre $H \pm 0,01$. Pour pouvoir comparer les valeurs de $J_2 \times \frac{2H}{\pi/q\varphi}$ obtenues n° 26 et 27 avec celles de l'expression 118, il faut multiplier aussi cette expression par $\frac{2H}{\pi/q\varphi}$ ce qui avec $H = 0,25$, $q = 2$, $\varepsilon = 0,01$ donne

$$16 \left(1 + \frac{1}{16}\right) \times 4,9120 \times 0,01 = 0,83504$$

ce nombre est très inférieur aux valeurs de $J_2 \times \frac{2H}{\pi/q\varphi}$ trouvées précédemment (9,8 — 19,7 — 109,8 selon que $U = 1, 10, 100$) le nombre des comètes visibles dont les vitesses initiales sont entre $H \pm 0,01$ ne forme donc qu'une faible fraction du nombre total.

En résumé, on voit que la prépondérance des vitesses initiales H parmi les comètes visibles existe réellement, mais cette prépondérance n'est pas suffisante pour rendre négligeable le nombre des comètes visibles dont la vitesse s'écarte beaucoup de cette valeur, surtout si la limite supérieure des vitesses U est grande.

Peut-on regarder H comme une valeur moyenne de la vitesse initiale? Le nombre des comètes visibles dont la vitesse est infé-

rieure à H s'obtient en faisant $V = H$ dans la formule 96 (nous admettons que la condition $V < U - H$ est remplie, c'est-à-dire $U > 2H$) ce qui donne (1) :

$$J \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = \frac{qH^3}{f} - 4 \int_0^1 \frac{Lx}{1-x^2} dx = \frac{qH^3}{f} + \frac{\pi^2}{2} \quad (120)$$

En comparant ce nombre au total des comètes visibles donné par la formule 103, nous voyons que lorsque H est petite et U voisine de 1 il y a à peu près le même nombre de comètes avec vitesses inférieures et supérieures à H, ainsi pour $H = 0,25$, $U = 1$, $q = 2$ les formules 120 et 103 ont les valeurs

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{2} + 0,125 \\ \pi^2 - 0,007 - \dots \end{aligned}$$

Mais si la limite U est grande, le terme $\frac{2qHU}{f}$ de la formule 103 devient grand et il y a beaucoup plus de comètes avec vitesses initiales supérieures qu'inférieures à H.

Nous devons encore remarquer que le fait même qui conduit à admettre une grande prépondérance pour les vitesses voisines de H, savoir que pour $V = H$ la formule 115 est infinie, disparaît si l'on fait abstraction des comètes qui nous viennent des régions voisines de l'apex du Soleil ; dans ce cas, en effet, au lieu de faire varier α de 0 à π il faut faire varier cet angle depuis une valeur α' différente de zéro jusqu'à π et la quantité $L \left(\frac{V+H}{V-H} \right)^2$ dans la formule 115 est remplacée par $L \frac{(V+H)^2}{V^2 - 2VH \cos \alpha' + H^2}$ qui ne devient jamais infinie.

Enfin si la fonction $\varphi(h)$ au lieu d'être une constante tend vers

(1) Pour $V = H$ la vraie valeur du premier terme de la formule 96 est nulle.

zéro avec h la prépondérance des vitesses initiales H peut encore disparaître. Si $\varphi(h)$ n'est pas une constante la formule 114 devient

$$dV \times \pi f q \left(1 + \frac{qV^2}{2f}\right) \int_0^\pi \frac{\varphi(\sqrt{V^2 - 2VH \cos \alpha + H^2})}{V^2 - 2VH \cos \alpha + H^2} \sin \alpha \, d\alpha \quad (121)$$

posons

$$V^2 - 2VH \cos \alpha + H^2 = x^2$$

d'où

$$\sin \alpha \, d\alpha = \frac{x \, dx}{VH}$$

l'intégrale que renferme la formule 121 devient

$$\frac{1}{VH} \int \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$$

pour $V = H$ les limites de x sont 0 et $2H$, donc pour que l'expression 121 ne soit pas infinie pour $V = H$, il faut que

$$\int_0^{2H} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$$

ne soit pas infinie, ce qui aura lieu sûrement si la fonction $\varphi(h)$ est de la forme Ch , C étant une constante ou plus généralement une fonction quelconque de h qui ne devient jamais infinie.

29.— Comme autre application des formules nous allons examiner l'hypothèse du n° 18 :

$$\varphi(h) = Mh^2$$

La formule 90 devient

$$J = \frac{\pi f q M}{2H} \int_{H-V}^{H+V} h \left[L V^2 + \frac{q V^2}{2f} - L(H-h)^2 - \frac{q(H-h)^2}{2f} \right] dh \quad (122)$$

Calculons d'abord l'intégrale indéfinie et pour cela divisons l'expression sous le signe \int en trois termes :

$$h \left(L V^2 + \frac{q V^3}{2f} \right) - \frac{q(H^2 h - 2Hh^2 + h^3)}{2f} - h L(H - h)^2$$

l'intégration des deux premiers termes donne

$$\frac{h^2}{2} \left(L V^2 + \frac{q V^3}{2f} \right) - \frac{q}{2f} \left(\frac{H^2 h^2}{2} - \frac{2Hh^3}{3} + \frac{h^4}{4} \right)$$

pour intégrer le terme $h L(H - h)^2 dh$ posons $H - h = x$, d'où

$$\int h L(H - h)^2 dh = \int x L x^2 dx = \int H L x^2 dx$$

nous avons ensuite (1)

$$\int x L x^2 dx = \frac{x^2}{2} (L x^2 - 1) \quad \int H L x^2 dx = H x (L x^2 - 2)$$

par conséquent

$$\int h L(H - h)^2 dh = \frac{(H - h)^2}{2} [L(H - h)^2 - 1] - H(H - h) [L(H - h)^2 - 2]$$

et nous trouvons que la formule 122 devient :

$$J \times \frac{2H}{\pi f q M} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{h^2}{2} \left(L V^2 + \frac{q V^3}{2f} \right) - \frac{q}{2f} \left(\frac{H^2 h^2}{2} - \frac{2Hh^3}{3} + \frac{h^4}{4} \right) \\ & - \frac{(H - h)^2}{2} [L(H - h)^2 - 1] + H(H - h) [L(H - h)^2 - 2] \end{aligned} \right\}_{H-V}^{H+V}$$

En substituant pour h , $H + V$ puis $H - V$ et faisant la différence cette formule se simplifie beaucoup et nous obtenons finalement

$$J = 2\pi f q M \left(V + \frac{q V^3}{6f} \right) \quad (123)$$

(1) Voir le *Calcul infinitésimal* de HOUËL, t. I, p. 215. — Je fais abstraction de la constante qu'il faudrait ajouter à toutes les intégrales indéfinies.

Il est à remarquer que cette formule ne renferme pas la vitesse du Soleil H et est identique à la formule 66 obtenue sous la supposition que le Soleil est immobile ; il fallait s'y attendre à priori car, dans le cas que nous étudions, le nombre des comètes visibles dépend simplement du volume de l'hyperboloïde depuis son centre jusqu'à la distance V .

Pour trouver J_2 nous avons d'après la formule 92.

$$J_2 = \frac{\pi f q M}{2H} \int_0^U h \left[L(H+h)^2 + \frac{q(H+h)^2}{2f} - L(H-h)^2 - \frac{q(H-h)^2}{2f} \right] dh \quad (124)$$

on effectue l'intégration de $hL(H+h)^2 dh$ en posant $H+h=x$.

$$\int hL(H+h)^2 dh = \int xLx^2 dx - H \int Lx^2 dx = \frac{x^3}{2} (Lx^2 - 1) - Hx(Lx^2 - 2)$$

ou bien

$$\int hL(H+h)^2 dh = \frac{(H+h)^3}{2} [L(H+h)^2 - 1] - H(H+h) [L(H+h)^2 - 2]$$

Cette expression ne diffère de $\int hL(H-h)^2 dh$ qui a été obtenue plus haut, que par le changement de h en $-h$. L'intégrale de la formule 124 est maintenant facile à obtenir, nous trouvons pour sa valeur

$$\left| \begin{aligned} & \frac{(H+U)^3}{2} [L(H+U)^2 - 1] - H(H+U) [L(H+U)^2 - 2] \\ & - \frac{(H-U)^3}{2} [L(H-U)^2 - 1] + H(H-U) [L(H-U)^2 - 2] \\ & + \frac{2q}{3f} HU^3 \end{aligned} \right|$$

En prenant pour limites 0 et U et portant dans la formule 124 nous obtenons finalement

$$J_2 \times \frac{2H}{\pi f q M} = \frac{U^3 - H^3}{2} L \left(\frac{U+H}{U-H} \right)^2 + 2HU + \frac{2q}{3f} HU^3 \quad (125)$$

30. — On peut aussi obtenir les formules 123 et 125 par la méthode du n° 21. En effet, dans le cas $\varphi(h) = Mh^2$, la formule 75 devient (1).

$$J = \pi f q M \int_0^\pi \left[\int_0^V \left(1 + \frac{qv^2}{2f} \right) dv \right] \sin \alpha \, d\alpha \quad (126)$$

l'intégration par rapport à v s'effectue immédiatement

$$J = \pi / q M \int_0^\pi \left(V + \frac{qV^3}{6f} \right) \sin \alpha \, d\alpha$$

l'intégration par rapport à α s'effectue aussi et nous obtenons

$$J = 2\pi f q M \left(V + \frac{qV^3}{6f} \right) \quad (127)$$

ce qui est bien la même valeur de J que celle obtenue au n° précédent (formule 123).

Pour obtenir J_2 il faut faire usage de la formule 79, qui après que l'intégration relative à v est effectuée donne

$$J_2 = \pi / q M \int_0^\pi \left(l + \frac{ql^3}{6f} \right) \sin \alpha \, d\alpha \quad (128)$$

l est une fonction de α donnée par l'équation 77. Prenons l pour variable, nous avons

$$\cos \alpha = \frac{l^2 + H^2 - U^2}{2Hl} \quad - \sin \alpha \, d\alpha = \frac{U^2 + l^2 - H^2}{2Hl^2} \, dl$$

(1) Je suppose $V < U - H$.

aux limites 0 et π pour α correspondent pour l les limites $U + H$ et $U - H$, de sorte que la formule 128 devient

$$J_2 = \pi f q M \int_{U+H}^{U-H} \left(l + \frac{ql^3}{6f} \right) \times \frac{H^2 - U^2 - l^2}{2Hl^2} dl \quad (129)$$

l'intégration n'offre plus de difficulté, l'intégrale indéfinie est :

$$\frac{\pi f q M}{2H} \left[(H^2 - U^2) L l + \left(q \frac{H^2 - U^2}{6f} - 1 \right) \frac{l^2}{2} - \frac{ql^4}{24f} \right] + C$$

En prenant $U + H$ et $U - H$ pour limites et effectuant les réductions, on trouve :

$$J_2 = \frac{\pi f q M}{2H} \left[(U^2 - H^2) L \frac{U+H}{U-H} + 2HU + \frac{2q}{3f} HU^3 \right] \quad (130)$$

ce qui est identique à la formule 125.

Nous avons donc les formules nécessaires pour les calculs numériques au cas où $\varphi(h) = Mh^2$ entre $h = 0$ et $h = U$. Admettons comme précédemment $H = 0,25$, $q = 2$, $V = 0,1$, $f = 1$, la formule 127 nous donne

$$\frac{J}{2\pi f q M} = 0,100\ 333$$

et la formule 130 donne pour $\frac{J_2}{2\pi f q M}$ les valeurs suivantes

U	
1	1,31223
10	343,3312
100	333 433,3330

De ces valeurs de J et J_2 nous déduisons, comme nous l'avons fait plusieurs fois, les valeurs suivantes pour le rapport entre les nom-

bres des orbites dont les demi grands axes sont supérieurs et inférieurs à 100 en valeur absolue :

U	
1	0,082 790
10	0,000 292
100	0,000 000 301

D'après ces nombres les orbites fortement hyperboliques devraient être très nombreuses.

Pour avoir le nombre total des comètes visibles renfermées entre deux sphères de rayons r et $r + 1$ ayant le Soleil pour centre, il suffit d'opérer comme aux nos 16, 19, 26, nous avons ici, en conservant les notations de ces numéros et appelant N les valeurs de $\frac{J_2}{2\pi f q M}$ que nous venons de calculer :

$$J_2 = 2\pi f q M N \qquad N_2 = \int_0^U M h^2 dh = \frac{1}{3} M U^3$$

donc

$$\frac{J_2}{N_2} = \frac{6\pi f q}{U^3} N$$

ce qui donne pour $\frac{J_2}{N_2}$ les valeurs suivantes

U	
1	49,470
10	12,943
100	12,570

Il est à remarquer que les résultats que nous trouvons selon que $\varphi(h)$ est une simple constante ou est représentée par Mh^2 , sont moins différents que dans le cas où le Soleil était supposé immobile. Et que si $\varphi(h) = Mh^2$ les résultats obtenus sont presque les mêmes que le Soleil soit immobile ou en mouvement. Il est facile de comprendre a priori qu'il doit bien en être ainsi.

31. — Les exemples que nous avons donnés suffisent pour montrer l'application des formules et faire bien comprendre leur sens, il est donc inutile de faire sur la fonction $\varphi(h)$ de nouvelles hypothèses. Dans les deux suppositions très différentes $\varphi(h) = \text{constante}$ et $\varphi(h) = Mh^2$ que nous avons examinées, si l'on tient compte du mouvement du Soleil, les orbites fortement hyperboliques doivent être très nombreuses; on peut se demander s'il est possible de concevoir une fonction $\varphi(h)$ telle que ces orbites soient rares. Il est en effet théoriquement possible de rendre très petit le nombre des comètes visibles sensiblement hyperboliques, tel qu'il est donné par les formules de ce chapitre (c'est-à-dire à une grande distance du Soleil). Pour cela il faut admettre que toutes les valeurs de la vitesse absolue h diffèrent très peu de la vitesse du Soleil H .

Si toutes les valeurs de h sont entre $H - \varepsilon$ et $H + \varepsilon$, ε étant très petit, le nombre J est encore donné par la formule 90, mais d'après ce qui a été dit n° 24, il faut prendre pour limites de l'intégration $H - \varepsilon$ et $H + \varepsilon$. La forme de la fonction $\varphi(h)$ entre ces étroites limites a peu d'importance, nous la supposons constante. Les termes sous le signe \int qui ne sont pas infinis pour $h = H$ varient très peu lorsque h augmente de $H - \varepsilon$ à $H + \varepsilon$ et par conséquent pour les intégrer il suffit de remplacer dh par 2ε et h par H . Il reste à intégrer le terme qui renferme $L(H - h)^2$, le coefficient qui multiplie ce logarithme variant très peu on peut le faire sortir du signe \int et on a simplement à intégrer

$$\int_{H-\varepsilon}^{H+\varepsilon} L(H-h)^2 dh$$

en posant $H - h = x$ cette intégrale devient

$$-\int_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} Lx^2 dx = 4 \int_0^{\varepsilon} Lx dx = 4 \left[x Lx - x \right]_0^{\varepsilon} = 4\varepsilon(L\varepsilon - 1)$$

D'après ces remarques, la formule 90 nous donne :

$$J \times \frac{H^2}{\pi f q \varphi} = \left(\frac{1}{2} L V^2 + \frac{q V^2}{4 f} - L \varepsilon + 1 \right) \times 2 \varepsilon \quad (131)$$

Cette valeur de J dépend très peu de V, en effet comme le terme $-L\varepsilon$ est très grand et que V ne peut dépasser $2H + \varepsilon$, lorsque V croît d'une petite valeur à sa plus grande valeur possible J augmente très peu, donc la plupart des orbites sont très peu hyperboliques.

Mais l'hypothèse que toutes les vitesses h sont entre $H - \varepsilon$ et $H + \varepsilon$, ε étant très petit, qui est à priori peu probable, n'est pas admissible parce que presque toutes les comètes viendraient des points de la sphère céleste situés le long d'un grand cercle perpendiculaire à la direction du mouvement du Soleil. En effet, d'après la formule 71 le nombre des comètes qui viennent d'une certaine direction dépend de l'expression

$$\int_{\varphi} \frac{1 + \frac{qv^2}{2f}}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} dv \quad (132)$$

les extrémités des vitesses sont toutes entre deux sphères de centre C et de rayons $H - \varepsilon$ et $H + \varepsilon$ (fig. 9), la moitié de l'hyperboloïde

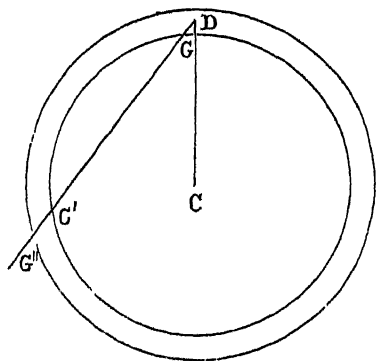


Fig. 9

tournée vers le Soleil coupe ces sphères aux points G, G', G''. Dans la formule 132 il faut faire varier v d'abord de 0 à DG, puis de DG' à DG''; dans le premier cas on a des orbites presque paraboliques, dans le second au contraire tant que α n'est pas très voisin de 100° on a des orbites fortement hyperboliques. La valeur de la formule 132 lorsque v varie de DG' à DG'' est évidemment plus grande que

lorsque v varie de 0 à DG. On voit donc que la grande prépondérance des orbites faiblement hyperboliques provient uniquement

des valeurs de σ peu différentes de 100° , valeurs pour lesquelles les longueurs DG et G'G'' deviennent beaucoup plus grandes que pour les valeurs de α qui diffèrent de 100° .

Ce cas étant écarté, il n'est possible de rendre les orbites fortement hyperboliques rares qu'en admettant que la vitesse du Soleil et celles des corps répandus dans les espaces interstellaires sont très petites; sans cela il est inexplicable qu'aucune vitesse absolue correspondant à une vitesse relative sensible n'ait son extrémité à l'intérieur de l'hyperboloïde. La supposition que les vitesses du Soleil et des étoiles sont très petites, n'est pas d'accord avec ce que nous connaissons sur les mouvements de ces astres, il paraît donc dès à présent bien difficile d'expliquer l'absence des orbites hyperboliques, si l'on fait venir les comètes des espaces interstellaires.

Nous allons voir dans le second chapitre, qu'en considérant les comètes au voisinage du périhélie, on est amené à des conclusions encore plus favorables à l'opinion que ces astres sont des membres permanents du système solaire.

CHAPITRE II

NOMBRE DES ORBITES DE GRAND AXE DONNÉ DANS LE VOISINAGE DU SOLEIL

Mémoire de M. Davis.

32. — M. Davis a publié dans le *Philosophical Magazine* un mémoire ⁽¹⁾ sur la probabilité des orbites hyperboliques, dans lequel il traite la question sous un point de vue qui a beaucoup d'analogie avec les bases de la solution que nous allons donner dans ce second chapitre, je vais donc commencer par rendre compte de ce mémoire.

Au lieu de chercher, comme nous l'avons fait dans le premier chapitre, le nombre des comètes visibles de grand axe donné qui se trouvent à un instant quelconque dans les régions de l'espace situées près des limites de la sphère d'activité du Soleil, l'auteur cherche le nombre des comètes visibles de grand axe donné qui pendant un certain temps entrent dans la sphère d'activité du Soleil, c'est la différence essentielle de son calcul avec ceux de notre premier chapitre. Il considère l'excentricité au lieu du grand axe, et examine séparément chaque valeur de la distance périhélie.

Soit comme précédemment r le rayon de la sphère d'activité du Soleil, fixons notre attention sur les comètes qui entrent dans cette sphère par un élément $d\sigma$ (*fig. 10*) et dont les vitesses relativement

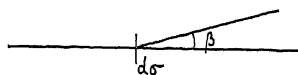


Fig 10

au Soleil sont entre deux limites infiniment voisines $v, v + dv$; admettons que les vitesses sont uniformément ré-

(1) On the probable character of cometary orbits, *Philosophical Magazine*, septembre 1870 et janvier 1871.

parties dans toutes les directions, le nombre de celles qui font avec la normale à l'élément $d\sigma$ des angles compris entre deux limites infiniment voisines β , $\beta + d\beta$ est alors $C_1 \sin\beta d\beta$, C_1 désignant un coefficient constant. Comme d'autre part la surface $d\sigma$ projetée sur un plan perpendiculaire à l'une quelconque des directions β a pour valeur $d\sigma \times \cos\beta$, le nombre des comètes qui pendant l'unité de temps traversent l'élément $d\sigma$ avec des vitesses dont les valeurs sont entre v , $v + dv$ et les angles avec la normale entre β , $\beta + d\beta$ est

$$C_1 \sin\beta \cos\beta d\beta \quad (133)$$

M. Davis admet, comme autrefois Laplace (n° 3), que le nombre des comètes qui ont des valeurs comprises entre v , $v + dv$ (dv ayant une certaine valeur fixe) est le même pour toute valeur de v , jusqu'à une certaine limite U . Alors le nombre des comètes qui traversent l'élément $d\sigma$ pendant un temps donné avec des vitesses entre v et $v + dv$ varie proportionnellement (1) à v , de sorte que le nombre des comètes qui pendant l'unité de temps traversent l'élément $d\sigma$ avec des vitesses dont les valeurs sont entre v , $v + dv$ et les angles avec la normale entre β , $\beta + d\beta$ est

$$Cv \sin\beta \cos\beta d\beta dv \quad (134)$$

C désigne un coefficient constant. Cela posé, des équations 48 du n° 13 nous déduisons :

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= f\left(\frac{2}{r} + \frac{e-1}{q}\right) \\ r^2 \sin^2 \beta &= \frac{q(1+e)}{\frac{2}{r} + \frac{e-1}{q}} \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

(1) Ceci est à peu près évident parce que si l'on double par exemple la vitesse des comètes il y en a deux fois plus qui traversent l'élément $d\sigma$ pendant l'unité de temps ; ce sera rendu encore plus clair par les réflexions du numéro suivant.

A la distance périhélie q et l'excentricité e correspondent une vitesse v et une direction β données par les équations 135.

Si nous regardons v et β comme les coordonnées rectangulaires d'un point du plan, $dv \times d\beta$ représente l'aire d'un petit rectangle et l'expression 134 peut s'écrire

$$C v \sin \beta \cos \beta \times \text{rectangle } dv d\beta$$

de sorte que si η désigne une aire infiniment petite autour du point dont les coordonnées sont v, β , l'expression

$$C v \sin \beta \cos \beta \times \eta \quad (136)$$

représente le nombre des comètes qui traversent l'élément $d\sigma$ pendant l'unité de temps avec des valeurs de v et β représentées par les points situés à l'intérieur de l'aire η .

Considérons les comètes qui ont des distances périhéliques entre $q, q + dq$ avec des excentricités entre $e, e + de$, les valeurs correspondantes de v et β sont représentées par les points situés à l'intérieur d'un parallélogramme infinitésimal dont les sommets ont pour coordonnées :

$$\begin{array}{ll} v & \dots\dots\dots \beta \\ v + \frac{dv}{dq} dq & \dots\dots\dots \beta + \frac{d\beta}{dq} dq \\ v + \frac{dv}{de} de & \dots\dots\dots \beta + \frac{d\beta}{de} de \\ v + \frac{dv}{dq} dq + \frac{dv}{de} de & \dots\dots\dots \beta + \frac{d\beta}{dq} dq + \frac{d\beta}{de} de \end{array}$$

l'aire de ce parallélogramme est

$$\left(\frac{dv}{de} \frac{d\beta}{dq} - \frac{dv}{dq} \frac{d\beta}{de} \right) de dq$$

donc d'après la formule 136 le nombre des comètes considérées est

$$C v \sin \beta \cos \beta \left(\frac{dv}{de} \frac{d\beta}{dq} - \frac{dv}{dq} \frac{d\beta}{de} \right) de dq \quad (137)$$

En différentiant les équations 135 nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{dv}{de} &= \frac{f}{2qv} & \frac{dv}{dq} &= -\frac{f(e-1)}{2q^2v} \\ \frac{d\beta}{de} &= \frac{q^2(q-r)}{r \sin\beta \cos\beta (2q+r\overline{e-1})^2} & \frac{d\beta}{dq} &= \frac{q(1+e)(q+r\overline{e-1})}{r \sin\beta \cos\beta (2q+r\overline{e-1})^2} \end{aligned}$$

substituons ces valeurs dans l'expression 137, nous obtenons après réduction :

$$C \frac{f e}{2r(2q+r\overline{e-1})} de dq$$

et en supprimant le facteur constant $C \frac{f}{2r}$,

$$\frac{e}{2q+r\overline{e-1}} de dq \quad (138)$$

Cette expression est donc, à un coefficient constant près, égale au nombre des comètes qui pendant l'unité de temps entrent dans la sphère d'activité du Soleil (1) et dont les distances périhéliques sont entre les limites $q, q + dq$ et les excentricités entre $e, e + de$.

Pour avoir le nombre des comètes dont les distances périhéliques sont entre $q, q + dq$ et dont les excentricités sont inférieures à une valeur donnée e , il faut intégrer l'expression 138 par rapport à e , en prenant pour limite inférieure la plus petite valeur de l'excentricité. Cette plus petite valeur, qui correspond au grand axe $r + q$, est $\frac{r-q}{r+q}$. L'intégrale indéfinie de la formule 138 par rapport à e est

$$\frac{1}{r^2} \left[re + (r-2q)L(2q+r\overline{e-1}) + \text{Const.} \right] dq$$

(1) Nous n'avons considéré qu'un seul élément $d\sigma$ de cette sphère, mais les circonstances sont les mêmes pour tous les éléments.

en prenant $\frac{r-q}{r+q}$ pour limite inférieure de l'intégration, et supprimant le facteur $\frac{1}{r^2}$ on trouve

$$\left[r \left(e - \frac{r-q}{r+q} \right) + (r-2q) L \frac{(2q + r \overline{e-1})(r+q)}{2q^2} \right] dq \quad (139)$$

Cette expression, multipliée par un coefficient constant, représente donc le nombre des comètes qui pendant l'unité de temps entrent dans la sphère d'activité du Soleil et dont les distances périhéliques sont entre q , $q + dq$ et les excentricités inférieures à e . On ne doit pas faire descendre e au-dessous de $\frac{r-q}{r+q}$.

En négligeant q devant r et supprimant le facteur r , l'expression 139 devient :

$$\left[e - 1 + L \frac{(2q + r \overline{e-1})}{2q^2} \right] dq \quad (140)$$

Examinons maintenant les conséquences des formules que nous venons de trouver, et d'abord cherchons le rapport du nombre des comètes elliptiques au nombre total. Pour considérer les comètes elliptiques seules il faut faire $e = 1$, la formule 140 devient alors

$$L \frac{r}{q} \times dq \quad (141)$$

Pour avoir la totalité des comètes, il faut donner à e sa plus grande valeur e' , qui correspond à la plus grande valeur de la vitesse U . En négligeant la très petite quantité $\frac{2q}{r}$, la première des équations 135 nous donne

$$e' - 1 = \frac{qU^2}{f} \quad (142)$$

Portons cette valeur dans l'expression 140 et prenons comme précédemment $f = 1$ (n° 10), nous obtenons :

$$\left[qU^2 + L \frac{(2 + rU^2)r}{2q} \right] dq \quad (143)$$

Le rapport du nombre des comètes elliptiques au nombre total, égal au rapport des expressions 141 et 143, est donc :

$$\frac{L \frac{r}{q}}{qU^2 + L \frac{(2 + rU^2)r}{2q}} \quad (144)$$

La valeur de cette expression dépend de la limite des vitesses U , mais si cette limite n'est ni trop petite ni trop grande, elle est assez voisine de $\frac{1}{2}$. En effet si la quantité U n'est pas très petite on peut négliger 2 devant rU^2 et le dénominateur peut s'écrire

$$qU^2 + L \frac{qU^2}{2} + 2 L \frac{r}{q}$$

Si U n'est pas bien grande (voisine de 1) la quantité $qU^2 + L \frac{qU^2}{2}$ est assez petite relativement à $2 L \frac{r}{q}$, de sorte que la valeur de l'expression 144 est voisine de $\frac{1}{2}$, ce qui veut dire que parmi les comètes de distance périhélie q qui pendant un temps donné entrent dans la sphère d'activité du Soleil la moitié décrivent des ellipses et l'autre moitié des hyperboles.

Si, comme cela paraît probable (n° 20), la valeur de U est deux ou trois fois la vitesse de la Terre, l'expression 144 est inférieure à $\frac{1}{2}$ et il y a plus d'hyperboles que d'ellipses.

Cherchons le nombre des comètes dont l'excentricité est supérieure à une valeur donnée e ; au moyen des formules 140 et 143 nous voyons que parmi les comètes de distance périhélie q le rapport du nombre de celles dont l'excentricité surpasse e au nombre total est :

$$1 - \frac{e - 1 + L \frac{(2q + r \overline{e - 1})r}{2q^2}}{qU^2 + L \frac{(2 + rU^2)r}{2q}} \quad (145)$$

M. Davis admet pour valeur de U trois rayons de l'orbite ter-

restre par an, il fait remarquer par des considérations analogues à celles du n° 20 que cette valeur est probablement trop faible. En prenant pour unité la vitesse de la Terre dans son orbite on a

$$U = \frac{3}{2\pi} \qquad U^2 = \frac{9}{4\pi^2} = 0,22797$$

Pour r , q , e l'auteur adopte successivement diverses valeurs, devant revenir plus loin sur la même question (n° 38) contentons-nous de faire $q = 1$, $r = 100\,000$, $e = 1,02$ la formule 145 prend alors la valeur suivante :

$$1 - \frac{0,02 + L2002 + L50000}{0,22797 + L22799 + L50000} = 0,1253$$

Parmi les comètes de distances périhélies 1 il y en aurait donc (1) 12 à 13 pour 100 dont les excentricités seraient supérieures à 1,02, résultat qui n'est pas du tout confirmé par les observations.

M. Davis conclut donc que les comètes sont des membres permanents du système solaire. Mais malgré cela il n'abandonne pas la théorie d'après laquelle ces astres viendraient des espaces interstellaires et se prononce en faveur d'une théorie mixte ; pour lui les comètes nous viennent au début des espaces interstellaires mais quelques unes d'entre elles restent liées pour toujours au système solaire, de sorte que les comètes que nous connaissons, ou au moins la plupart d'entre elles, sont actuellement des membres permanents de ce système. Il reste à expliquer comment une comète peut être liée pour toujours au Soleil, M. Davis croit avec raison que l'action des planètes n'a pas eu cet effet sauf des cas exceptionnels ; il l'explique par l'action d'un milieu résistant. Par des calculs approchés il trouve qu'une résistance analogue à celle qu'on a cru constater

(1) Si l'on compare ce nombre à ceux donnés par M. Davis (*Philosophical Magazine*, 1870, t. II, p. 189), il ne faut pas oublier que ceux-ci sont les nombres des excentricités supérieures à e parmi 100 orbites hyperboliques, l'auteur démontre ensuite qu'avec la valeur de U qu'il admet il y a à peu près autant de comètes elliptiques que de comètes hyperboliques.

dans le mouvement de la comète d'Encke peut diminuer légèrement le grand axe de l'orbite, pour une orbite elliptique de distance aphélie 400 000 fois le rayon de l'orbite terrestre et de distance périhélie égale à celle de la comète d'Encke, la distance aphélie serait diminuée de 0,02 de sa valeur pendant une révolution. Cette diminution n'est pas bien forte, mais comme d'après le calcul de M. Davis la moitié des orbites sont elliptiques, elle peut suffire à expliquer comment un certain nombre de comètes venues au début des espaces interstellaires ont été rattachées pour toujours au système solaire.

Si nous comparons les résultats de M. Davis à ceux de notre premier chapitre, nous trouvons de grandes différences. L'hypothèse que les vitesses relatives au Soleil sont réparties uniformément dans toutes les directions et que leurs valeurs sont toutes également probables entre zéro et U est précisément celle faite par Laplace, et sur laquelle les calculs du n° 10 sont basés. La différence entre les résultats de ce numéro et ceux de M. Davis provient donc seulement de ce que cet auteur a considéré le nombre des comètes qui, pendant un temps donné, entrent dans la sphère d'activité du Soleil. Il est facile de comprendre que c'est avec raison qu'il a agi ainsi. En effet, imaginons une série de sphères ayant le Soleil pour centre et considérons seulement les comètes dont la distance périhélie est inférieure au rayon de la plus petite, dans leur marche ces comètes traversent successivement les surfaces de toutes ces sphères et il est clair que pendant l'unité de temps le même nombre d'entre elles traversent l'une quelconque de ces surfaces. Donc si nous considérons les comètes qui ont une distance périhélie assez petite pour que nous puissions les observer et en outre remplissent certaines conditions, le nombre de celles qui en moyenne passent au périhélie pendant un certain temps est le même que le nombre de celles qui pendant cet intervalle de temps entrent dans la sphère d'activité du Soleil. Ce sera d'ailleurs rendu encore plus clair par ce que nous dirons dans la suite.

Mais les résultats précédents ne peuvent pas se concilier avec ceux que nous avons obtenus en tenant compte du mouvement du Soleil.

En effet, nous avons trouvé que toutes les orbites devaient être hyperboliques, à de très rares exceptions près, comme les comètes elliptiques vont plus lentement que celles qui sont hyperboliques, elles entrent plus lentement dans la sphère d'activité du Soleil et la considération du nombre des comètes qui entrent dans cette sphère ne peut que rendre les orbites elliptiques encore plus rares. Ainsi d'après les calculs du premier chapitre toutes les comètes devraient être hyperboliques, tandis qu'ici on en trouve la moitié d'elliptiques. Cette différence vient de ce que M. Davis, bien qu'il admette le mouvement du Soleil, n'en a en réalité pas tenu compte dans son calcul. Il part de l'hypothèse que les directions des vitesses sont réparties indifféremment dans tous les sens et que leurs valeurs sont toutes également probables entre zéro et U ; d'après ce que nous avons dit n° 21 et suivants, lorsqu'on tient compte du mouvement propre du Soleil, ces hypothèses ne peuvent pas être faites sur les vitesses relatives. D'abord leurs directions ne seront pas uniformément réparties, cependant l'hypothèse d'une répartition uniforme peut être considérée comme approximativement exacte. Mais ce qui ne peut être admis c'est que toutes les valeurs soient également probables entre zéro et une limite U ; en effet revenons à la figure 4 (n° 21), comme la fonction $\varphi(h)$ ne varie pas brusquement et que les vitesses absolues h sont regardées comme uniformément distribuées en direction, pour des valeurs de la vitesse absolue comprises entre deux limites h_1, h_2 peu différentes les points E (extrémités des vitesses absolues h) seront distribués à peu près uniformément dans l'espace compris entre deux sphères de rayons h_1, h_2 et de centre G; or les points E sont aussi les extrémités des vitesses relatives v , et pour des valeurs de v comprises entre zéro et une limite peu élevée les valeurs correspondantes de h sont peu différentes, il en résulte que lorsqu'on tient compte du mouvement du Soleil les extrémités E des vitesses relatives peuvent, pour de petites valeurs de ces vitesses, être regardées comme uniformément répandues dans l'espace; c'est la seconde hypothèse que nous avons étudiée et nous avons vu que dans ce cas $\varphi(v) = Mv^2$, loi qui conduit à des conséquences différentes de celles que l'on déduit de la supposition $\varphi(v) = \text{constante}$.

Donc en résumé M. Davis a eu raison de compter le nombre des comètes qui entrent dans la sphère d'activité du Soleil, mais son calcul ne tient pas compte du mouvement du système solaire dans l'espace.

Remarques sur la fonction φ .

33. — Nous avons désigné par $\varphi(h)dh$ le nombre des comètes qui se trouvent dans l'unité de volume et dont les vitesses ont des valeurs comprises entre $h, h + dh$; nous pouvons aussi concevoir, au point de l'espace considéré, une petite surface $d\sigma$ (fig. 10) et désigner par une certaine fonction de h et β le nombre des comètes qui dans l'unité de temps traversent cette surface ⁽¹⁾ $d\sigma$ avec des vitesses dont les valeurs sont comprises entre $h, h + dh$ et dont les angles avec la normale sont entre $\beta, \beta + d\beta$. D'après les considérations données au commencement du n° 32 ce nombre peut être représenté par

$$d\sigma \times \psi(h) \sin\beta \cos\beta \, dh \, d\beta \quad (146)$$

$\psi(h)$ est une certaine fonction de h seulement,

Il faut trouver la relation entre la fonction $\psi(h)$ et la fonction $\varphi(h)$ dont nous nous sommes servis jusqu'ici. Imaginons une sphère de rayon ρ quelconque, située dans la région considérée de l'espace, et

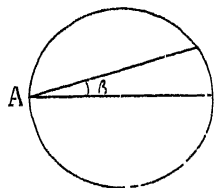


Fig 11

la formule 146 étant admise, cherchons le nombre des comètes de vitesses comprises entre $h, h + dh$ qui sont à l'intérieur de cette sphère.

Remarquons à cet effet que tous les corps qui s'y trouvent actuellement ont traversé la surface de la sphère, considérons en un point A de cette

surface un élément $d\sigma$, le nombre des corps qui traversent cet élément pendant l'unité de temps avec des vitesses comprises dans les limites $h, h + dh$ et $\beta, \beta + d\beta$ est donné par la formule 146.

(1) Les vitesses étant uniformément réparties en tous sens ce nombre est le même quelle que soit l'orientation de l'élément $d\sigma$

Ces corps parcourent dans la sphère le chemin $2\rho \cos\beta$, le nombre de ceux qui se trouvent à l'intérieur de la sphère à un instant quelconque est par conséquent •

$$d\sigma \times \psi(h) \sin\beta \cos\beta \, dh \, d\beta \times \frac{2\rho \cos\beta}{h}$$

pour avoir le nombre des corps de vitesses comprises entre h , $h + dh$ qui sont à l'intérieur de la sphère et y sont entrés par l'élément $d\sigma$, il faut intégrer par rapport à β de 0 à $\frac{\pi}{2}$ ce qui donne

$$d\sigma \times \psi(h)dh \times \frac{2\rho}{h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\beta \cos^2\beta \, d\beta = d\sigma \times \psi(h)dh \times \frac{2\rho}{3h}$$

Enfin pour avoir le nombre total des comètes de vitesses comprises entre h , $h + dh$ qui sont à l'intérieur de la sphère, il faut étendre cette formule à la surface entière, ce qui se fait simplement en remplaçant $d\sigma$ par la valeur de cette surface $4\pi\rho^2$, nous obtenons ainsi :

$$\frac{8\pi\rho^3}{3h} \psi(h)dh \quad (147)$$

D'autre part quand nous représentons par $\varphi(h)dh$ le nombre des comètes visibles de vitesses entre h , $h + dh$ qui se trouvent dans l'unité de volume, le nombre de ces comètes dans une sphère de rayon ρ est

$$\frac{4}{3} \pi\rho^3 \times \varphi(h)dh \quad (148)$$

En égalant les expressions 147 et 148, et supprimant les facteurs communs nous trouvons

$$\psi(h) = \frac{1}{2} h \varphi(h) \quad (149)$$

telle est la relation très simple qui existe entre les fonctions $\varphi(h)$ et $\psi(h)$.

Cette relation peut encore être démontrée de la manière suivante :
D'après la formule 146, le nombre des comètes qui traversent un plan limité σ pendant l'unité de temps avec des vitesses comprises entre les limites $h, h + dh$ et des directions comprises entre 0 et β est :

$$\sigma \psi(h) dh \int_0^\beta \sin \beta \cos \beta d\beta = \sigma \psi(h) dh \times \frac{1}{4} (1 - \cos 2\beta)$$

Considérons le cas où β est infiniment petit, un cylindre droit ayant σ pour base et pour hauteur h renfermera un nombre de corps de vitesses comprises dans les limites $h, h + dh$ et $0, \beta$ (β étant infiniment petit) égal à celui des corps qui traversent la surface σ pendant l'unité de temps, car tous ceux de ces corps qui sont contenus au temps t dans ce cylindre ont traversé σ entre les temps t et $t - 1$. Ce nombre est donc

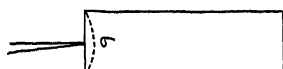


Fig 12

$$\sigma \psi(h) dh \times \frac{1}{4} (1 - \cos 2\beta) \quad (150)$$

il peut aussi se calculer au moyen de la fonction $\varphi(h)$, en effet le nombre des corps qui se trouvent dans l'unité de volume avec des vitesses comprises entre les limites h et $h + dh$, β et $\beta + d\beta$ est

$$\varphi(h) dh \times \frac{1}{2} \sin \beta d\beta \quad (151)$$

Remarquons qu'il faut bien le facteur $\frac{1}{2} \sin \beta d\beta$, en effet le nombre que nous voulons exprimer par la formule 151 peut être représenté par

$$k \varphi(h) dh \times \sin \beta d\beta$$

k étant une constante, or on doit avoir

$$k \varphi(h) dh \int_0^\pi \sin \beta d\beta = \varphi(h) dh$$

ce qui donne $k = \frac{1}{2}$. Le nombre des corps considérés qui se trouvent dans le cylindre ayant pour base σ et pour hauteur h est donc :

$$\varphi(h)dh \times \frac{1}{2} \int_0^\beta \sin \beta \, d\beta \times h\sigma = \varphi(h)dh \times \frac{1}{2} h\sigma(1 - \cos \beta) \quad (152)$$

En égalant les expressions 150 et 152 nous trouvons, après suppression des facteurs communs :

$$\psi(h) = h \varphi(h) \times 2 \frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos 2\beta} \quad (153)$$

β étant infiniment petit $\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos 2\beta}$ est de la forme $\frac{\sigma}{\sigma}$, en prenant deux fois le rapport des dérivées on trouve que la vraie valeur est $\frac{1}{4}$ et la formule 153 devient

$$\psi(h) = \frac{1}{2} h \varphi(h)$$

ce qui est bien la formule 149.

SUITE DE NOTRE ÉTUDE

SUR LA PROBABILITÉ DES COMÈTES HYPERBOLIQUES

Les formules que nous avons trouvées dans le premier chapitre donnent les nombres de comètes visibles de grand axe compris entre des limites données que nous devrions trouver si nous nous transportions à une très grande distance du Soleil, dans les régions de l'espace où l'attraction de cet astre devient insensible, et que placés là nous comptions les comètes visibles ⁽¹⁾ situées autour de nous. Comme en réalité nous observons de la Terre, ces formules sont loin de donner une solution complète de la question. Nous allons maintenant chercher les nombres de comètes visibles de grand axe compris entre certaines limites que nous devons réellement trouver en observant de la Terre.

Cas où l'on suppose le Soleil immobile.

34. — Nous conservons les mêmes notations qu'au n° 13, chap. I, v désigne la vitesse relativement au Soleil, β l'angle de cette vitesse avec le rayon vecteur r . Dans le cas où l'on suppose le Soleil

(1) Il ne faut pas oublier que par *comètes visibles* nous entendons les comètes dont la distance périhélie est inférieure à une limite q , égale à environ deux fois le rayon de l'orbite terrestre.

immobile la vitesse relativement au Soleil et la vitesse absolue h coïncident. Considérons les comètes visibles qui correspondent aux valeurs de la vitesse initiale v comprises entre les limites $v, v + dv$ et de l'angle β comprises entre $\beta, \beta + d\beta$. Soit n_1 le nombre de ces comètes qui se trouvent entre deux sphères de rayons $r, r + dr$ ayant le Soleil pour centre et n_2 le nombre de ces mêmes comètes qui se trouvent en moyenne dans une sphère de rayon q ayant aussi le Soleil pour centre.

Les comètes considérées ne restent pas le même temps dans ces deux espaces, elles restent dans le premier un certain temps t_1 , dans le second un temps t_2 . Nous avons entre n_1, t_1, n_2, t_2 la relation

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

car puisque les comètes qui passent dans les deux espaces sont les mêmes, leurs nombres dans chaque espace sont dans le même rapport que les temps qu'elles y restent.

Si cette relation ne paraît pas évidente on peut la démontrer comme il suit : les comètes que nous considérons ont des mouvements identiques et on ne change rien en supposant qu'elles décrivent toutes la même trajectoire. Alors si deux d'entre elles traversent un certain point de cette trajectoire à un certain intervalle de temps, il est clair qu'elles se suivront toujours après le même intervalle de temps, et il devient évident que le même nombre des comètes considérées traversent pendant l'unité de temps la sphère de rayon $r + dr$, la sphère de rayon r et celle de rayon q , désignons ce nombre par μ . Le nombre des comètes renfermées entre les sphères de rayons $r, r + dr$ est alors μt_1 de sorte que $n_1 = \mu t_1$, de même $n_2 = \mu t_2$ donc

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

Soit maintenant P le nombre des comètes situées dans la sphère de rayon q ayant le Soleil pour centre et dont la vitesse initiale (à la

distance r) avait une valeur comprise entre certaines limites données, nous avons

$$P = \Sigma n_2 = \Sigma n_1 \frac{t_2}{t_1}$$

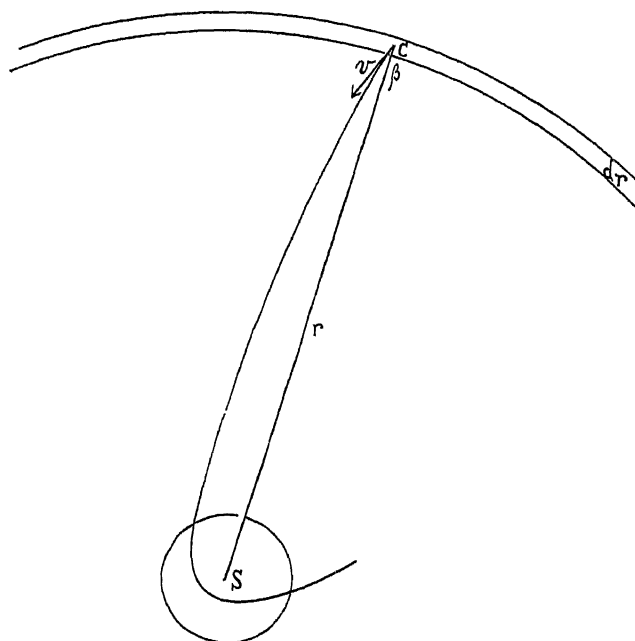


Fig. 13

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de n_1 , t_2 , t_1 qui correspondent à des comètes visibles pour lesquelles la valeur de la vitesse initiale est entre les limites données.

Désignons toujours par $\varphi(v)dv$ le nombre total des comètes de vitesses comprises entre v , $v + dv$ qui se trouvent dans l'unité de volume à la distance r du Soleil; le nombre des comètes qui se trouvent dans l'unité de volume et dont les vitesses ont des valeurs entre v , $v + dv$ et des directions entre β , $\beta + d\beta$ est :

$$\varphi(v)dv \times \frac{1}{2} \sin \beta d\beta$$

done

$$n_1 = 4\pi r^2 dr \times \varphi(v) dv \times \frac{1}{2} \sin \beta d\beta = 2\pi r^2 \varphi(v) \sin \beta dv d\beta dr$$

Le temps t_1 est lié à v et β par la formule

$$t_1 = \frac{dr}{v \cos \beta}$$

car les comètes que nous considérons mettent le temps t_1 pour parcourir la longueur $\frac{dr}{\cos \beta}$ avec la vitesse v ; t_2 est aussi une fonction de v et β , mais une fonction assez compliquée, nous avons alors

$$n_2 = n_1 \frac{t_2}{t_1} = t_2 \times 2\pi r^2 v \varphi(v) \sin \beta \cos \beta dv d\beta \quad (154)$$

et la valeur de P s'obtient par l'intégration de n_2 entre les limites données, de sorte que

$$P = 2\pi r^2 \int_{v_1}^V dv \int_0^{\beta_1} t_2 \times v \varphi(v) \sin \beta \cos \beta d\beta \quad (155)$$

v_1 et V sont les limites arbitraires choisies pour v ; β_1 est une fonction de v qui représente la plus grande valeur de β correspondante à v , c'est-à-dire la valeur de β pour laquelle la distance périhélie est égale à la limite q pour la valeur v de la vitesse, elle est donnée par la formule 49 du premier chapitre :

$$v^2 = \frac{2fq \left(1 - \frac{q}{r}\right)}{r^2 \sin^2 \beta_1 - q^2} \quad (156)$$

Relativement à la limite inférieure v_1 , nous devons faire la même remarque qu'au n° 15, la formule 155 n'est applicable que si $v_1 > A$ avec

$$A = \sqrt{\frac{2fq}{r^2 - q^2} \left(1 - \frac{q}{r}\right)}$$

Si l'on prend zéro pour limite inférieure des vitesses, il faut faire $v_1 = A$ et ajouter ensuite à la formule 155 la quantité

$$2\pi r^2 \int_0^A dv \times v \varphi(v) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t_2 \sin \beta \cos \beta d\beta$$

parce que pour $v < A$ la limite de β est $\frac{\pi}{2}$. De sorte que finalement le nombre moyen des comètes situées dans la sphère de rayon q ayant le Soleil pour centre et dont les vitesses initiales sont inférieures à V est :

$$P = 2\pi r^2 \int_0^A dv \times v \varphi(v) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t_2 \sin \beta \cos \beta d\beta + 2\pi r^2 \int_A^V dv \times v \varphi(v) \int_0^{\beta_1} t_2 \sin \beta \cos \beta d\beta \quad (157)$$

Il importe de bien comprendre le sens de cette formule. P est le nombre des comètes de vitesses initiales inférieures à V qui se trouvent en moyenne dans la sphère de rayon q ayant le Soleil pour centre. Pour obtenir ce nombre par l'observation, il faudrait compter à une série d'instants différents les comètes qui se trouvent dans la sphère de rayon q (supposé que nous puissions voir toutes ces comètes) et dont la vitesse initiale était inférieure à V , ce qui nous sera indiqué par la valeur du grand axe de l'orbite, et prendre la moyenne des résultats obtenus.

35. — J'ai donné la formule 157 parce qu'elle a une signification analogue à celles du premier chapitre, mais je vais la transformer de façon à obtenir le nombre des comètes visibles de vitesses initiales données qui passent au périhélie dans l'unité de temps. Reprenons la formule 154 :

$$n_2 = t_2 \times 2\pi r^2 v \varphi(v) \sin \beta \cos \beta dv d\beta$$

où n_2 est le nombre des comètes dont la vitesse initiale a une valeur

comprise dans les limites $v, v + dv$ et une direction dans les limites $\beta, \beta + d\beta$ qui se trouvent dans la sphère du rayon q . Désignons par n'_2 le nombre de ces mêmes comètes qui passent au périhélie pendant l'unité de temps, nous avons

$$n_2 = n'_2 t_2$$

en effet, ces comètes mettent le temps $\frac{t_2}{2}$ pour aller de leur entrée dans la sphère de rayon q au périhélie et aussi $\frac{t_2}{2}$ pour aller du périhélie à leur sortie. Leur nombre entre le périhélie et la sortie est donc $n'_2 \frac{t_2}{2}$, leur nombre entre l'entrée et le périhélie est le même, par conséquent $n_2 = n'_2 t_2$. Il s'ensuit :

$$n'_2 = \frac{n_2}{t_2} = 2\pi r^2 v \varphi(v) \sin \beta \cos \beta \, dv \, d\beta \quad (158)$$

Désignons par P' le nombre des comètes visibles de vitesses initiales comprises entre v_1 et V qui passent au périhélie dans l'unité de temps, P' se déduit de n'_2 comme P de n_2 et nous trouvons

$$P' = 2\pi r^2 \int_{v_1}^V dv \times v \varphi(v) \int_0^{\beta_1} \sin \beta \cos \beta \, d\beta \quad (159)$$

β_1 est toujours donné par la formule 156.

36 — La formule 159 peut encore être trouvée par une autre marche. Considérons les comètes qui décrivent une orbite déterminée, le nombre de ces astres qui pendant l'unité de temps passent par un point quelconque de cette orbite est constant et égal au nombre de ceux qui pendant l'unité de temps passent au périhélie. Cela posé, nous avons vu n° 33 que le nombre des comètes qui à une grande distance du Soleil traversent un élément de surface $d\sigma$ et dont les vitesses ont des valeurs entre $v, v + dv$ et des directions entre $\beta, \beta + d\beta$ peut être représenté par

$$d\sigma \times \psi(v) \sin \beta \cos \beta \, dv \, d\beta$$

pour avoir le nombre n'_2 il suffit d'étendre cette formule à tous les éléments de la surface d'une sphère de rayon r ayant le Soleil pour centre, ce qui donne

$$n'_2 = 4\pi r^2 \psi(v) \sin\beta \cos\beta \, dv \, d\beta$$

valeur égale à l'expression 158 car $\psi(v) = \frac{1}{2} v \varphi(v)$, de n'_2 on déduira P' comme précédemment.

Il faut reproduire ici la remarque déjà faite sur la limite inférieure des vitesses, lorsqu'on prend cette limite égale à zéro la formule 159 devient :

$$P' = 2\pi r^2 \int_0^A dv \times v \varphi(v) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\beta \cos\beta \, d\beta + 2\pi r^2 \int_A^v dv \times v \varphi(v) \int_0^{\beta_1} \sin\beta \cos\beta \, d\beta \quad (160)$$

Dans cette formule P' est le nombre des comètes visibles (distances périhélies inférieures à q) de vitesses initiales inférieures à V qui passent au périhélie pendant l'unité de temps.

La formule 160 est préférable à la formule 157, d'abord pour obtenir P' par l'observation il suffira de compter pendant un certain temps les comètes que nous voyons passer au périhélie; ensuite la formule 160 ne renferme pas t_2 , ce qui permet d'effectuer l'intégration relative à β . Nous avons en effet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\beta \cos\beta \, d\beta = \frac{1}{2} \quad \int_0^{\beta_1} \sin\beta \cos\beta \, d\beta = \frac{1}{2} \sin^2\beta_1$$

l'équation 156 donne alors

$$\int_0^{\beta_1} \sin\beta \cos\beta \, d\beta = \frac{1}{2} \frac{q^2}{r^2} + \frac{fq}{v^2 r^2} \left(1 - \frac{q}{r}\right)$$

et la formule 160 devient

$$P' = \pi r^2 \int_0^A v \varphi(v) dv + \pi \int_A^V v \varphi(v) \left[q^2 + \frac{2fq}{v^2} \left(1 - \frac{q}{r} \right) \right] dv \quad (161)$$

Dans le cas où l'on prendrait la limite supérieure V inférieure à A, il faudrait simplement

$$P' = \pi r^2 \int_0^V v \varphi(v) dv \quad (162)$$

Conséquences des formules.

37.—Examinons le cas du chapitre I, n^{os} 10 et 16, où $\varphi(r)$ est une constante, que nous désignerons encore simplement par la lettre φ . La formule 161 devient

$$P' = \pi r^2 \varphi \int_0^A v dv + \pi \varphi \int_A^V \left[q^2 v + \frac{2fq}{v} \left(1 - \frac{q}{r} \right) \right] dv$$

l'intégration se fait sans difficulté.

$$P' = \pi \varphi \left[\frac{r^2}{2} A^2 + \frac{q^2}{2} (V^2 - A^2) + 2fq \left(1 - \frac{q}{r} \right) L \frac{V}{A} \right]$$

ou en remplaçant A^2 par sa valeur (formule 50) :

$$P' = \pi \varphi \left[fq \left(1 - \frac{q}{r} \right) + \frac{q^2}{2} V^2 + 2fq \left(1 - \frac{q}{r} \right) L \frac{V}{A} \right] \quad (163)$$

Cherchons comme au n^o 10 le rapport entre le nombre des comètes visibles dont la vitesse initiale est inférieure à V et le nombre de celles dont la vitesse initiale dépasse V; en faisant $V=U$ dans la formule 163, nous avons le nombre total des comètes visibles qui passent au périhélie dans l'unité de temps :

$$\pi \varphi \left[fq \left(1 - \frac{q}{r} \right) + \frac{q^2}{2} U^2 + 2fq \left(1 - \frac{q}{r} \right) L \frac{U}{A} \right] \quad (164)$$

il faut retrancher de ce total le nombre des comètes dont la vitesse est inférieure à V , donné par la formule 163, prendre cette différence comme dénominateur et la formule 163 comme numérateur, nous obtenons ainsi :

$$\frac{f\left(1 - \frac{q}{r}\right) + \frac{q}{2} V^2 + 2f\left(1 - \frac{q}{r}\right) L \frac{V}{A}}{\frac{q}{2}(U^2 - V^2) + 2f\left(1 - \frac{q}{r}\right) L \frac{U}{V}} \quad (165)$$

Cette formule joue ici le même rôle que la formule 39 dans le premier chapitre, elle donne le rapport entre le nombre des comètes visibles de vitesses initiales inférieures à V et le nombre de celles de vitesses supérieures à V qui passent au périhélie dans l'unité de temps, ou par conséquent dans un intervalle de temps quelconque

38 — Pour le calcul de la valeur numérique de la formule 165 admettons comme précédemment $q = 2$, $r = 100\,000$, l'unité de longueur étant le rayon de l'orbite terrestre, et prenons pour unité de vitesse la vitesse de la Terre dans son orbite, par conséquent $f = 1$. En prenant d'abord pour V la vitesse parabolique à la distance r , la formule 165 donnera le rapport du nombre des orbites elliptiques au nombre des orbites hyperboliques. Les valeurs numériques de V et $\frac{1}{A}$ sont :

$$V = \sqrt{\frac{1}{50000}} \quad \frac{1}{A} = 50000,5$$

et la formule 165 prend la valeur suivante :

$$\frac{1 + 2(1 - 0,00002)\left(L\,50000,5 - \frac{1}{2}L\,50000\right)}{U^2 - 0,00002 + 2(1 - 0,00002)\left(L\,U + \frac{1}{2}L\,50000\right)}$$

ou à très peu près

$$\frac{1 + L\,50000}{U^2 + 2L\,U + L\,50000} \quad (166)$$

Voici les valeurs de cette expression (1) pour $U = 1, 10, 100$:

U	
1	1,0000
10	0,1024
100	0,0012

On voit que, dans le cas $\varphi(v) = \text{Constante}$, le rapport du nombre des ellipses à celui des hyperboles, parmi les orbites des comètes qui passent au périhélie pendant un certain intervalle de temps, dépend de la valeur de U ; pour $U = 1$ il y a juste autant d'hyperboles que d'ellipses (avec $q = 2$), si U dépasse 1 il y a beaucoup plus d'hyperboles. D'autre part il est clair que si la limite U était extrêmement petite il n'y aurait plus que des orbites elliptiques ; mais si l'on donne à U des valeurs déjà assez petites on trouve encore un grand nombre d'hyperboles, ainsi pour $U = 0,1$ la formule 166 prend la valeur 1,8989, pour $U = 0,01$ elle prend la valeur 7,3442, dans ce dernier cas où la limite des vitesses U est cependant fort petite il y a encore une hyperbole pour sept ellipses.

Si au lieu de supposer $r = 100\,000$ on donne à r d'autres valeurs, il faut dans la formule 166 remplacer le nombre 50 000 par $\frac{r}{2}$, on voit alors que la valeur de cette formule dépend de r et si r augmente indéfiniment elle tend vers 1 quel que soit U , ce qui indiquerait des nombres égaux d'ellipses et d'hyperboles.

Prenons maintenant pour V la vitesse qui correspond au demi grand axe — 100 ; cette vitesse, calculée n° 10, est 0,1001 ou à très peu près 0,1. La formule 165 devient, en négligeant des fractions très petites :

$$\frac{1 + 0,01 + 2(L\,50000 - L\,10)}{U^2 - 0,01 + 2(L\,U + L\,10)}$$

(1) Pour ces calculs numériques ne pas oublier que les logarithmes qui se trouvent dans les formules sont des logarithmes népériens.

Voici les valeurs de cette quantité pour $U = 1, 10, 100$

U	
1	3,2249
10	0,1652
100	0,0018

Ces valeurs indiquent un grand nombre d'orbites sensiblement hyperboliques, ainsi pour $U = 1$ il y aurait une orbite sensiblement hyperbolique (demi grand axe inférieur à 100) pour trois qui ne le seraient pas, pour $U = 10$ la plupart des orbites seraient sensiblement hyperboliques. Si la limite U est inférieure à 1 il est clair que le nombre de ces orbites diminue et si elle est inférieure à 0,1 il n'y a plus du tout d'orbites hyperboliques avec demi grand axe inférieur à 100, en valeur absolue.

Remarquons encore que la valeur de la formule 165 dépend de r qui y entre par la quantité Λ , à cause de cela si l'on suppose r supérieur à 100 000 le nombre des orbites sensiblement hyperboliques est un peu moindre que pour $r = 100$ 000. Mais comme c'est le logarithme de r que renferme la formule 165, pour rendre le nombre des orbites sensiblement hyperboliques très petit il faudrait supposer que la quantité r , rayon de la sphère d'activité du Soleil, est un grand nombre de fois 100 000, ce qui n'est guère admissible à cause de la présence des étoiles dans l'espace.

Le cas que nous venons d'examiner est le même que celui traité par M. Davis (n° 32), et en effet les résultats de cet auteur s'accordent avec ceux que nous obtenons ici.

39. — Désignons par P'_2 le nombre total des comètes visibles qui passent au périhélie dans l'unité de temps, par N_2 le nombre total des comètes contenues dans l'unité de volume à la distance r du Soleil et par N la valeur numérique de la quantité entre crochets dans la formule 164. En répétant le raisonnement du n° 16, nous trouvons

$$P'_2 = \pi \varphi N \qquad N_2 = U \varphi$$

d'où

$$\frac{P'_2}{N_2} = \frac{\pi}{U} \left[f q \left(1 - \frac{q}{r} \right) + \frac{q^2}{2} U^2 + 2 f q \left(1 - \frac{q}{r} \right) L \frac{U}{A} \right] \quad (167)$$

Voici quelques valeurs de $\frac{P'_2}{N_2}$ déduites de cette formule :

U	
1	148,53
10	79,95
100	630,32

Ces valeurs sont intéressantes parce qu'elles montrent quel doit être, avec les hypothèses admises, le nombre des comètes répandues dans les espaces interstellaires. Admettons par exemple $U = 1$, le nombre des comètes qui se trouvent dans une unité de volume aux limites de la sphère d'attraction du Soleil est 148 fois moindre que le nombre des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps ; comme nous avons pris la vitesse de la Terre pour unité de vitesse, l'unité de temps est une fraction de l'année égale à $\frac{1}{2\pi}$. Pendant les 50 années écoulées du 1^{er} janvier 1842 au 1^{er} janvier 1892, on a vu passer au périhélie 154 comètes de distances périhéliques inférieures à 2 (abstraction faite du retour des comètes périodiques) ; comme beaucoup de comètes doivent rester cachées par les rayons solaires ou invisibles à cause de leurs distances périhéliques trop voisines de la limite 2, on peut évaluer au double soit 300 le nombre des comètes visibles qui passent au périhélie pendant une période de 50 ans, ce qui fait six par an et un environ pour le temps $\frac{1}{2\pi}$, il y aurait donc, dans les régions de l'espace très éloignées du Soleil une comète pour 148 unités de volume, c'est-à-dire pour un cube ayant pour côté un peu plus de cinq fois le rayon de l'orbite terrestre.

40. — Examinons aussi, comme au n° 18, l'hypothèse $\varphi(v) = Mv^2$; la formule 161 devient

$$P' = M\pi r^2 \int_0^A v^3 dv + M\pi \int_A^V \left[q^2 v^3 + 2fq \left(1 - \frac{q}{r} \right) v \right] dv \quad (168)$$

ou en intégrant

$$P' = M\pi \left[\frac{1}{4} q^2 V^4 + \frac{1}{4} A^4 (r^2 - q^2) + fq \left(1 - \frac{q}{r} \right) (V^2 - A^2) \right] \quad (169)$$

Nous en déduisons pour le rapport du nombre des comètes de vitesses initiales inférieures à V au nombre de celles de vitesses supérieures :

$$\frac{\frac{1}{4} q^2 V^4 + \frac{1}{4} A^4 (r^2 - q^2) + fq \left(1 - \frac{q}{r} \right) (V^2 - A^2)}{\frac{1}{4} q^2 (U^4 - V^4) + fq \left(1 - \frac{q}{r} \right) (U^2 - V^2)}$$

ou à très peu près

$$\frac{\frac{1}{4} q V^4 + f V^2}{\frac{1}{4} q (U^4 - V^4) + f (U^2 - V^2)} \quad (170)$$

Si l'on prend V égale à la vitesse parabolique à la distance r , la valeur de cette expression est presque nulle, c'est-à-dire que dans le cas $\varphi(v) = Mv^2$ toutes les orbites seront des hyperboles, sauf de très rares exceptions. Si nous prenons comme précédemment $q = 2$, $f = 1$, $V = 0,1$, l'expression 170 prend les valeurs suivantes :

U	
1	0,0067
10	0,000 002
100	0,000 000 000 2

On voit que dans le cas que nous examinons ici presque toutes les orbites seraient sensiblement hyperboliques.

Il est à remarquer que la valeur de l'expression 170 ne dépend pas de r .

Pour avoir le nombre total des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps, désignons par N la valeur de la quantité entre crochets dans la formule 169 lorsqu'on y fait $V = U$, nous avons alors :

$$P'_2 = M\pi N \qquad N_2 = \int_0^U Mv^2 dv = \frac{1}{3} MU^3$$

P'_2 et N_2 désignant les mêmes quantités que précédemment, on en déduit :

$$\frac{P'_2}{N_2} = \frac{3\pi}{U^3} N$$

ou à très peu près

$$\frac{P'_2}{N_2} = 3\pi \left(\frac{1}{4} q^2 U + \frac{f q}{U} \right) \qquad (171)$$

Voici quelques valeurs de $\frac{P'_2}{N_2}$ déduites de cette formule

U	
1	28,27
10	96,13
100	942,67

41.— On voit que, lorsqu'on suppose le Soleil immobile, le nombre des comètes sensiblement hyperboliques qui doivent passer au périhélie pendant un certain temps dépend beaucoup de la fonction $\varphi(v)$. Lorsque cette fonction est une constante et que la limite supérieure des vitesses n'est pas très inférieure à la vitesse de la Terre dans son orbite, nous devons trouver une forte proportion d'hyperboles parmi les comètes que nous voyons passer au périhélie. Comme $\varphi(v)$ entre simplement en facteur dans chacun des éléments des intégrales de la formule 161, pour que les orbites sensiblement hyperboliques soient très rares il faudrait que la fonction $\varphi(v)$ soit beaucoup plus grande pour les petites valeurs de v que pour les valeurs de v un peu grandes.

42. — Nous avons dit (n° 6) que Laplace a cherché à tenir compte de ce que la probabilité des découvertes de comètes varie avec la distance périhélie, nous allons examiner rapidement cette question.

Pour cela, au lieu de chercher le nombre des comètes de grand axe donné dont les distances périhélie sont inférieures à une valeur donnée, cherchons le nombre de celles dont la distance périhélie est comprise entre deux valeurs infiniment voisines $q, q + dq$; il suffit de différentier la formule 161 par rapport à la variable q . D'après les règles de différentiation sous le signe \int et en tenant compte de ce que q entre dans la limite A des intégrales, nous trouvons

$$\frac{dP'}{dq} = \pi r^2 A \varphi(A) \frac{dA}{dq} - \pi A \varphi(A) \left[q^2 + \frac{2fq}{A^2} \left(1 - \frac{q}{r} \right) \right] \frac{dA}{dq} + \pi \int_A^V v \varphi(v) \left[2q + \frac{2f}{v^2} \left(1 - \frac{2q}{r} \right) \right] dv$$

les deux premiers termes peuvent s'écrire

$$\pi A \varphi(A) \frac{dA}{dq} \left[r^2 - q^2 - \frac{2fq}{A^2} \left(1 - \frac{q}{r} \right) \right]$$

d'après la valeur de A (formule 50) le facteur entre crochets est nul, de sorte que

$$\frac{dP'}{dq} = 2\pi \int_A^V v \varphi(v) \left[q + \frac{f}{v^2} \left(1 - \frac{2q}{r} \right) \right] dv \quad (172)$$

$\frac{dP'}{dq} dq$ représente le nombre des comètes de vitesse initiales inférieures à V et de distances périhélie entre $q, q + dq$ qui passent au périhélie dans l'unité de temps.

La formule 172 nous permet de résoudre pour une distance périhélie fixée les mêmes questions que la formule 161 pour les distances périhélie entre 0 et q . En ce qui concerne le rapport des nombres des orbites de vitesses initiales inférieures et supérieures

à V , en partant de la formule 172 nous obtenons ce rapport pour chaque distance périhélie donnée. Or d'une part les conditions de visibilité d'une comète dépendent peu du grand axe de son orbite, tant que l'orbite ne s'éloigne pas trop de la parabole, et d'autre part, lorsqu'on admet que le Soleil est immobile et que la fonction $\varphi(v)$ est la même dans toutes les directions, le rapport en question est indépendant des éléments autres que la distance périhélie. Il en résulte que pour une distance périhélie donnée le rapport réel et le rapport observé entre les nombres des orbites de grand axe inférieur et supérieur à une certaine limite sont égaux ; en partant de la formule 172, nous obtiendrons donc le rapport que nous devons réellement observer. On arrivera ainsi à des résultats analogues à ceux obtenus pour les distances périhélie inférieures à q , je me dispense de les développer.

Supposons que nous ayons représenté le nombre des comètes observées de distances périhélie inférieures à q par une certaine fonction de q , $\Phi(q)$; désignons l'expression 172 par $F_1(q)$, et par $F_2(q)$ la valeur de cette même expression lorsqu'on remplace V par la limite supérieure des vitesses, ou ce qui revient au même par ∞ . Le nombre des comètes de distances périhélie entre q , $q + dq$ qui ont été observées est $\frac{d\Phi(q)}{dq} dq$, et parmi ces comètes le nombre de celles dont la vitesse initiale est inférieure à V doit être :

$$\frac{d\Phi}{dq} dq \times \frac{F_1(q)}{F_2(q)}$$

Donc, le nombre total des comètes observées de vitesses initiales inférieures à V sera :

$$\int_0^{\infty} \frac{d\Phi}{dq} \times \frac{F_1(q)}{F_2(q)} dq \quad (173)$$

Solution en tenant compte du mouvement du Soleil.

43. — Reportons nous au premier chapitre n° 21, nous avons trouvé que le nombre des comètes visibles dont la vitesse est inférieure à V , qui se trouvent à un instant quelconque entre deux sphères de rayons $r, r + dr$ ayant le Soleil pour centre est, d'après la formule 75,

$$dr \times \pi f q \int_0^{\pi} d\alpha \times \sin \alpha \int_0^V f(v, \alpha) dv$$

Considérons les comètes pour lesquelles la vitesse est entre v et $v + dv$, leur nombre s'obtient par différentiation de cette expression par rapport à la limite V de la seconde intégrale (1), ce qui donne :

$$dr \times \pi f q dv \int_0^{\pi} f(v, \alpha) \sin \alpha d\alpha \quad (174)$$

Remarquons maintenant que lorsqu'on tient compte du mouvement du Soleil, d'après ce qui a été dit au premier chapitre, le nombre des comètes visibles dont la vitesse initiale fait un angle sensible avec le rayon vecteur est extrêmement petit, et infiniment petit si r augmente indéfiniment. En effet, l'angle de la vitesse avec le rayon vecteur a été désigné par β et le maximum de β pour les comètes visibles est l'angle β_1 donné par la formule 156, d'où

$$\sin^2 \beta_1 = \frac{q^2}{r^2} + \frac{2fq}{v^2 r^2} \left(1 - \frac{q}{r}\right)$$

tant que v n'est pas extrêmement petite l'angle β_1 est extrêmement

(1) On peut aussi déduire la formule 174 de la formule 69, de la même manière que la formule 75 de la formule 71.

petit, par exemple pour v égale à la vitesse parabolique $\sqrt{\frac{2f}{r}}$, $q = 2$, $r = 100\,000$, on trouve $\beta_1 = 0^\circ,28$ seulement, et nous avons vu que le nombre des comètes visibles pour lesquelles la vitesse est inférieure à la vitesse parabolique est presque nul. Lorsque r augmente indéfiniment β tend vers zéro. Nous pouvons donc, en ne négligeant que des quantités infiniment petites, considérer toutes les comètes visibles qui se trouvent entre les deux sphères de rayons r , $r + dr$ et dont les vitesses sont entre v , $v + dv$ comme ayant leurs vitesses dirigées vers le Soleil, dès lors elles restent dans l'espace compris entre les sphères de rayons r , $r + dr$ le temps

$$t_1 = \frac{dr}{v}$$

Répetons maintenant les raisonnements du n° 34, soit encore t_2 le temps que mettent ces comètes pour traverser la sphère de rayon q ayant le Soleil pour centre ; t_1 ne dépend pas de l'angle β qui est toujours très petit, mais il n'en est pas de même de t_2 , parce qu'une très petite variation de β fait beaucoup varier la distance périhélie. La valeur de t_2 n'est donc pas la même pour toutes les comètes dont les vitesses initiales sont entre v , $v + dv$, et il faut considérer d'abord, parmi ces comètes, celles pour lesquelles t_2 a des valeurs comprises entre deux limites infiniment voisines (ce sont celles pour lesquelles β a des valeurs comprises entre deux limites infiniment voisines) elles forment une fraction du total que nous désignons par K' . Le nombre de ces comètes entre les deux sphères de rayons r , $r + dr$ s'obtient alors en multipliant l'expression 174 par K' , pour avoir ensuite leur nombre moyen dans une sphère de rayon q ayant le Soleil pour centre il faut multiplier par $\frac{t_2}{t_1}$ ou $v \frac{t_2}{dr}$, ce qui donne :

$$K' t_2 \pi f q v dv \int_0^\pi f(v, \alpha) \sin \alpha d\alpha \quad (175)$$

Répetons le raisonnement du n° 35 qui nous a donné le nombre

des comètes qui passent au périhélie dans l'unité de temps, nous aurons ce nombre en multipliant la formule 175 par $\frac{1}{t_2}$ ce qui élimine t_2 . Si ensuite au lieu de considérer parmi les comètes visibles de vitesses initiales entre $v, v + dv$ seulement celles pour lesquelles t_2 a une valeur déterminée et qui forment une fraction K' du total on veut les considérer toutes, comme le facteur qui multiplie K' est toujours le même, il suffit de supprimer ce coefficient K' . De sorte que nous trouvons que le nombre des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps et dont les vitesses initiales étaient entre $v, v + dv$, est :

$$\pi f q v dv \int_0^{\pi} f(v, \alpha) \sin \alpha d\alpha \quad (176)$$

Pour avoir le nombre des comètes visibles qui passent au périhélie dans l'unité de temps et dont les vitesses initiales étaient entre o et V , il faut intégrer la formule 176 par rapport à la variable v de o à V ; ce qui donne, en désignant encore ce nombre par P' :

$$P' = \pi f q \int_0^{\pi} d\alpha \sin \alpha \int_0^V f(v, \alpha) v dv \quad (177)$$

la fonction $f(v, \alpha)$ est toujours donnée par la formule 72.

Il y aurait à reproduire ici les considérations des numéros 22 et 23 sur le cas où $\varphi(h)$ est une fonction donnée pour h entre zéro et une limite U et est nulle ensuite, mais il suffit de se reporter à ce qui a été dit à ces numéros.

44. — Afin d'éviter toute objection relativement au raisonnement qui nous a amenés à considérer les vitesses des comètes visibles comme dirigées exactement vers le Soleil, je dois présenter quelques remarques. D'abord si nous voulions tenir compte du petit angle β que les vitesses font avec le rayon vecteur, le chemin parcouru par

les comètes entre les sphères de rayons r , $r + dr$ au lieu d'être simplement dr serait $\frac{dr}{\cos \beta}$ et le temps t_1 au lieu d'être $\frac{dr}{v}$ serait $\frac{dr}{v \cos \beta}$, on peut donc d'autant plus négliger de tenir compte de l'angle β qu'il entre dans les formules par son cosinus, lequel ne diffère de 1 que de la quantité extrêmement petite $\frac{\beta^2}{2}$. Ainsi si nous ne regardons pas β comme nul, le rapport $\frac{t_2}{t_1}$ par lequel nous avons multiplié la formule 175 pour obtenir 176 se trouve multiplié par $\cos \beta$ et par suite un peu diminué; il en résulte que la valeur de la formule 176 est un peu diminuée et comme β n'est sensible que pour de très petites valeurs de v , en tenant compte de cet angle nous diminuerions un peu le nombre des orbites peu différentes de la parabole. L'erreur infiniment petite commise en regardant β comme toujours nul est donc à l'avantage des orbites peu différentes de la parabole.

Si l'on voulait absolument tenir compte de l'angle β , on y arriverait d'ailleurs, d'une façon très approchée, de la manière suivante :

Reportons nous à la figure 5 (n° 21) et considérons le volume $MN MN'$ qui renferme les extrémités des vitesses des comètes visibles pour lesquelles la vitesse relative initiale est entre v et $v + dv$. Ce volume est extrêmement petit, infiniment petit lorsque r augmente indéfiniment, mais considérons le comme divisé lui-même en volumes infiniment petits égaux, qui donc lorsque r augmente indéfiniment sont des infiniment petits du second ordre. La probabilité que l'extrémité d'une vitesse absolue tombe dans l'un de ces petits volumes varie proportionnellement à $\frac{\varphi(h)}{h^2}$, on effet la probabilité que l'extrémité d'une vitesse absolue tombe entre deux sphères de rayons h , $h + dh$ ayant le point C pour centre varie comme $\varphi(h)$ et si nous supposons ce volume divisé en une série d'éléments infiniment petits égaux, la probabilité que l'extrémité de la vitesse tombe dans l'un de ces éléments variera proportionnellement à $\frac{\varphi(h)}{h^2}$. Le volume $MNM'N'$ étant extrêmement petit et infiniment petit si r augmente indéfiniment, les valeurs de $\frac{\varphi(h)}{h^2}$ pour les divers points de ce

volume ne diffèrent qu'extrêmement peu et nous pouvons les regarder comme égales. Considérons maintenant les vitesses relatives, dont l'origine est au point D, le volume MNM'N'' étant divisé en éléments infiniment petits égaux la probabilité que les extrémités de ces vitesses (extrémités qui sont les mêmes que celles des vitesses absolues) soient dans l'un de ces éléments est la même pour tous ces éléments, il en résulte que les vitesses relatives des comètes visibles peuvent être regardées comme distribuées uniformément en direction autour du point D. Ceci admis nous pouvons tenir compte de l'angle β .

Revenons à la formule 174, elle représente le nombre des comètes visibles renfermées entre deux sphères de rayons $r, r + dr$ ayant le Soleil pour centre et dont la vitesse est entre $v, v + dv$ ajoutons en outre la condition que l'angle de cette vitesse avec le rayon vecteur soit entre β et $\beta + d\beta$; la répartition des directions étant uniforme le nombre des vitesses de direction comprise entre $\beta, \beta + d\beta$ varie proportionnellement à $K'' \sin \beta d\beta$, K'' désignant une constante, pour les comètes considérées β à un maximum β_1 , si nous voulons que l'expression 174 multipliée par $K'' \sin \beta d\beta$ donne le nombre de ces comètes il faut que

$$\int_0^{\beta_1} K'' \sin \beta d\beta = 1$$

d'où

$$K'' = \frac{1}{1 - \cos \beta_1} \quad K'' \sin \beta d\beta = \frac{\sin \beta}{1 - \cos \beta_1} d\beta$$

Appliquons maintenant le raisonnement fait n° 43, la seule différence est que t_1 est ici égal à $\frac{dr}{v \cos \beta}$ et que le facteur désigné par K' est égal à $\frac{\sin \beta}{1 - \cos \beta_1} d\beta$; nous trouvons la formule suivante, pour le nombre des comètes qui passent au périhélie dans l'unité de temps et dont les vitesses relatives initiales étaient dans les limites $v, v + dv$ et $\beta, \beta + d\beta$:

$$\pi f q v \, dv \frac{\sin \beta \cos \beta}{1 - \cos \beta_1} d\beta \int_0^\pi f(v, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \quad (178)$$

Pour avoir le nombre P' des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps et donc les vitesses initiales sont inférieures à V il faut intégrer la formule 178 d'abord de 0 à β_1 relativement à β puis de 0 à V relativement à v , pour $v < A$ la limite β_1 est toujours $\frac{\pi}{2}$. L'intégration par rapport à β s'effectue facilement :

$$\int_0^{\beta_1} \frac{\sin \beta \cos \beta}{1 - \cos \beta_1} d\beta = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta_1}{1 - \cos \beta_1}$$

β_1 est lié à v par la formule 156 qui donne :

$$\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta_1}{1 - \cos \beta_1} = \frac{1}{2} \frac{\frac{q^2}{r^2} + \frac{2fq}{v^2 r^2} \left(1 - \frac{q}{r}\right)}{1 - \sqrt{\frac{q^2}{r^2} + \frac{2fq}{v^2 r^2} \left(1 - \frac{q}{r}\right)}} \quad (179)$$

pour $v < A$ il faut prendre $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta_1}{1 - \cos \beta_1} = \frac{1}{2}$. Pour abrégier nous désignerons la quantité $\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta_1}{1 - \cos \beta_1}$ qui est une fonction de v par E . En intégrant de 0 à V nous trouvons alors pour P' la valeur suivante :

$$P' = \pi f q \int_0^\pi d\alpha \times \sin \alpha \int_0^V E f(v, \alpha) v \, dv \quad (180)$$

Si nous comparons les formules 180 et 177 nous voyons que la différence consiste dans le facteur E ; ce facteur égal à $\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta_1}{1 - \cos \beta_1}$ diffère très peu de 1. En effet, pour $\beta_1 = 0$ il prend la forme $\frac{0}{0}$ mais

le rapport des dérivées montre que la vraie valeur est 1. Sa dérivée par rapport à β_1 est

$$\frac{1}{2} \frac{2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 (1 - \cos \beta_1) - \sin^3 \beta_1}{(1 - \cos \beta_1)^2} = -\frac{1}{2} \sin \beta_1$$

quantité négative car β_1 ne dépasse pas $\frac{\pi}{2}$, E diminue donc constamment lorsque β_1 varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et pour $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ sa valeur est $\frac{1}{2}$. On voit que pour la presque totalité des comètes le facteur E ne diffère pas sensiblement de 1, ce n'est que lorsque v devenant extrêmement petite β_1 diffère sensiblement de zéro, qu'il devient inférieur à 1 et sa plus petite valeur est $\frac{1}{2}$. La formule 180 nous donnerait donc des résultats très peu différents de la formule 177, et la différence consisterait dans une légère diminution du nombre des orbites voisines de la parabole.

45. — Le calcul des formules 177 et 180 exige deux intégrations, nous pouvons, comme dans le premier chapitre, n° 24, trouver une formule qui ne renferme qu'une seule intégrale. Pour cela reprenons les raisonnements déjà faits nos 34 et 43; considérons parmi les comètes visibles qui se trouvent entre deux sphères de rayons r , $r + dr$ ayant le Soleil pour centre celles dont les vitesses relatives ont des valeurs entre v , $v + dv$ et font avec le rayon vecteur des angles entre β , $\beta + d\beta$. Soit $n_1 dr$ le nombre de ces comètes et t_1 le temps qu'elles restent entre les deux sphères de rayons r , $r + dr$, $t_1 = \frac{dr}{v \cos \beta}$. Soit maintenant n_2 le nombre de ces comètes dans une sphère de rayon q ayant le Soleil pour centre, t_2 le temps qu'elles restent dans cette sphère et p le nombre de ces comètes qui passent au périhélie dans l'unité de temps, nous avons

$$n_2 = p \times t_2$$

entre $n_1 dr$, n_2 , t_1 , t_2 nous avons

$$\frac{n_2}{n_1 dr} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_2 \times v \cos \beta}{dr}$$

d'où, en remplaçant n_2 par pt_2 :

$$p = n_1 \times v \cos \beta$$

D'après cela, si dans le premier chapitre nous prenons une formule quelconque qui, multipliée par dr , donne le nombre des comètes remplissant certaines conditions qui se trouvent entre deux sphères de rayons r , $r + dr$, pour en déduire le nombre de ces comètes qui passent au périhélie dans l'unité de temps, il faut diviser le nombre donné par la formule du premier chapitre en éléments infiniment petits par des accroissements infiniment petits de v et β , multiplier chaque élément par $v \cos \beta$ et faire la somme.

Il est maintenant facile de déduire des formules du n° 24 d'autres formules analogues qui donnent le nombre des comètes visibles qui passent au périhélie dans l'unité de temps ; d'après ce que nous avons dit nos 43 et 44 nous pouvons faire $\cos \beta = 1$, il suffit donc de multiplier par v chaque élément infiniment petit des formules du n° 24.

La formule 87 devient alors :

$$dh \times \frac{\varphi(h)}{Hh} \pi f q \int \left(1 + \frac{qv^2}{2f}\right) dv \quad (181)$$

les limites de l'intégration sont encore $(H - h)$ en valeur absolue et V , de sorte que les formules 88 et 89 sont remplacées par les suivantes, qui s'obtiennent par l'intégration de la formule 181 entre ces limites :

$$f_3(h) dh = \frac{\varphi(h)}{Hh} \pi f q \left[v \left(1 + \frac{qV^2}{6f}\right) \mp (H - h) \left(1 + \frac{q(H - h)^2}{6f}\right) \right] dh \quad (182)$$

$$f_4(h) dh = \frac{\varphi(h)}{Hh} \pi f q \left[(H + h) \left(1 + \frac{q(H + h)^2}{6f}\right) \mp (H - h) \left(1 + \frac{q(H - h)^2}{6f}\right) \right] dh \quad (183)$$

Dans le double signe \mp on doit prendre $-$ pour $h < H$ et $+$ pour $h > H$, on pourrait mettre le signe $-$ seul et convenir de prendre toujours $H - h$ en valeur absolue.

Les formules 90, 91, 92 du n° 24 restent ensuite les mêmes, mais J est ici remplacé par P' et les fonctions f_1 et f_2 par f_3 et f_4 , de sorte que le nombre des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps est donné par les formules suivantes :

Si $V < H$

$$P' = \int_{H-V}^{H+V} f_3(h) dh \quad (184)$$

Si $V > H$

$$P' = \int_0^{V-H} f_4(h) dh + \int_{V-H}^{V+H} f_3(h) dh \quad (185)$$

et enfin le nombre total des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps est

$$P'_2 = \int_0^{\infty} f_4(h) dh \quad (186)$$

Nous avons ici à remarquer comme au n° 24 que si $\varphi(h)$ est représentée par une fonction donnée jusqu'à une limite U et nulle ensuite, il faudra arrêter les intégrations à cette limite.

Au lieu de faire usage des deux formules 184 et 185, on peut se servir de la formule 184 même dans le cas $V > H$, à la condition de regarder $\varphi(-h)$ comme égale à $\varphi(h)$; en effet, si dans l'expression 182 nous changeons h en $-h$ et convenons que pour h négatif, qui rentre dans le cas $h < H$, nous prenons le signe — dans le double signe \mp , nous trouvons

$$\frac{\varphi(h)}{Hh} \pi f q \left[(11 + h) \left(1 + \frac{q(H+h)^2}{6f} \right) - v \left(1 + \frac{qV^2}{6f} \right) \right] dh$$

cette expression ajoutée à la formule 182 donne la formule 183, il en résulte que

$$\int_{H-V}^{V-H} f_3(h) dh = \int_0^{V-H} f_4(h) dh$$

et que la formule 184 peut être employée même dans le cas $V > H$.

Conséquences des formules.

46. — Si nous comparons la formule 177 à la formule 75 du premier chapitre, nous voyons que la différence consiste en ce que chaque élément de l'intégration relative à la variable v est multiplié par la valeur de cette variable. Il en résulte que le nombre des orbites peu différentes de la parabole, pour lesquelles la vitesse v est petite, est considérablement diminué. Nous avons trouvé dans le premier chapitre, en tenant compte du mouvement du Soleil, que les orbites doivent toutes être hyperboliques, il en sera donc à fortiori de même ici, et parmi ces orbites hyperboliques le nombre de celles qui s'écartent beaucoup de la parabole sera augmenté dans une forte proportion.

Remarquons aussi que, lorsqu'on tient compte du mouvement du Soleil, r n'entre pas dans les formules, par conséquent le nombre des comètes de grand axe donné qui passent au périhélie dans l'unité de temps est indépendant du rayon de la sphère d'activité du Soleil.

47 — Examinons le cas où $\varphi(h)$ est une constante entre 0 et U . Le nombre des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps et dont les vitesses initiales étaient inférieures à V , est donné par la formule 184 ; l'intégration doit être divisée en deux parties, la première de $H - V$ à H , la seconde de H à $H + V$; pour la première partie, comme $h < H$, il faut prendre le signe — dans la formule 182, pour la seconde il faut prendre le signe +.

L'intégrale indéfinie $\int f_3(h) dh$, abstraction faite du facteur $\frac{\pi f q \varphi}{H}$ et de la constante arbitraire, est

$$\left(v + \frac{qV^3}{6f}\right) Lh \mp \left[H Lh - h + \frac{q}{6f} \left(H^3 Lh - 3H^2 h + \frac{3}{2} Hh^2 - \frac{h^3}{3}\right)\right]$$

le signe — convient au cas $h < H$, le signe + au cas $h > H$.

Prenant l'intégrale d'abord de $H - V$ à H avec le signe —, puis de H à $H + V$ avec le signe + nous trouvons (1) :

$$\times \frac{H}{\pi f q \varphi} = \frac{1}{2} \left(v + \frac{qV^3}{6f}\right) L \left(\frac{H+V}{H-V}\right)^2 + \frac{H}{2} L \left(1 - \frac{V^2}{H^2}\right)^2 + \frac{q}{6f} \left[\frac{H^3}{2} L \left(1 - \frac{V^2}{H^2}\right)^2 + HV^2\right] \quad (187)$$

Le nombre total des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps est donné par la formule 186, il faut prendre U pour limite supérieure de l'intégration. L'intégrale indéfinie, abstraction faite du facteur $\frac{\pi f q \varphi}{H}$ et de la constante arbitraire, est :

$$\left| \begin{array}{l} H Lh + h + \frac{q}{6f} \left(H^3 Lh + 3H^2 h + \frac{3}{2} Hh^2 + \frac{1}{3} h^3\right) \\ \mp \left[H Lh - h + \frac{q}{6f} \left(H^3 Lh - 3H^2 h + \frac{3}{2} Hh^2 - \frac{1}{3} h^3\right)\right] \end{array} \right|$$

Dans le double signe \mp il faut prendre — de 0 à H et + de H à U , dans le premier cas, les termes en Lh disparaissent. En donnant à h les valeurs 0, H , U cette expression prend les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{l} \text{Signe } - \left\{ \begin{array}{ll} h = 0 & 0 \\ h = H & 2H + \frac{qH^3}{6f} \left(6 + \frac{2}{3}\right) \end{array} \right. \\ \text{Signe } + \left\{ \begin{array}{ll} h = H & 2H LH + \frac{q}{6f} (2H^3 LH + 3H^3) \\ h = U & 2H LU + \frac{q}{6f} (2H^3 LU + 3HU^2) \end{array} \right. \end{array}$$

(1) Je suppose $V < U - H$, je mets $\frac{1}{2} L \left(\frac{H+V}{H-V}\right)^2$ et $\frac{1}{2} L \left(1 - \frac{V^2}{H^2}\right)^2$ pour ne pas distinguer deux cas selon que $V < H$ ou $V > H$, dans ce dernier cas il faut diviser l'intégration en trois parties limitées par les valeurs $H - V$, 0, H , $H + V$, ou faire usage de la formule 185.

dernières et ajoutant, nous trouvons finalement :

$$P' \times \frac{H}{\pi f q \varphi} = 2H \left(L \frac{U}{H} + 1 \right) + \frac{q}{6f} \left[2H^3 L \frac{U}{H} + 3(HU^2 + H^3) + \frac{2}{3} H^3 \right] \quad (188)$$

48. — Les formules 187 et 188 peuvent aussi être obtenues par la méthode du n° 43. En effet, dans le cas où φ est une constante, la formule 177 se réduit (1) à :

$$P' = \pi f q \varphi \int_0^\pi d\alpha \times \sin \alpha \int_0^V \frac{1 + \frac{qv^2}{2f}}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} v dv \quad (189)$$

comme les limites ne dépendent pas des variables, nous pouvons intervertir l'ordre des intégrations et écrire :

$$P' = \pi f q \varphi \int_0^V dv \times v \left(1 + \frac{qv^2}{2f} \right) \int_0^\pi \frac{\sin \alpha}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} d\alpha$$

or

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} d\alpha &= \frac{1}{2vH} \left[L(v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2) \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2vH} \left[L(v + H)^2 - L(v - H)^2 \right] \end{aligned}$$

La formule 189 devient donc :

$$P' = \frac{\pi f q \varphi}{2H} \int_0^V \left(1 + \frac{qv^2}{2f} \right) \left[L(v + H)^2 - L(v - H)^2 \right] dv \quad (190)$$

l'intégrale se déduit des deux suivantes

(1) Je suppose $V < U - H$ de façon que $h = v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2$ ne dépasse jamais la limite U .

$$\int Lx \, dx = x Lx - x \qquad \int x^2 Lx \, dx = \frac{x^3}{3} \left(Lx - \frac{1}{3} \right)$$

en appliquant ces deux formules nous trouvons

$$\int \left[L(v+H)^2 - L(v-H)^2 \right] dv = v L \left(\frac{v+H}{v-H} \right)^2 + H L(v^2 - H^2) + \text{const.}$$

et

$$\int v^2 \left[L(v+H)^2 - L(v-H)^2 \right] dv = \left| \begin{aligned} & \frac{v^3 + H^3}{3} L(v+H)^2 - \frac{v^3 - H^3}{3} L(v-H)^2 \\ & + \frac{2}{3} H v^2 + \text{const.} \end{aligned} \right|$$

la formule 190 devient alors

$$P' \times \frac{2H}{\pi f q \varphi} = \left| \begin{aligned} & v L \left(\frac{V+H}{V-H} \right)^2 + H L \left(\frac{V^2}{H^2} - 1 \right)^2 \\ & + \frac{q}{2f} \left[\frac{V^3}{3} L \left(\frac{V+H}{V-H} \right)^2 + \frac{H^3}{3} L \left(\frac{V^2}{H^2} - 1 \right)^2 + \frac{2HV^2}{3} \right] \end{aligned} \right| \quad (191)$$

on voit facilement que cette formule est identique à la formule 187.

Pour obtenir P'_2 , nombre total des comètes qui passent au périhélie dans l'unité de temps, il faut appliquer encore la formule 177, mais en remplaçant V par la quantité l conformément à ce qui a été dit n° 22, de sorte que dans le cas où φ est une constante nous avons :

$$P'_2 \times \frac{1}{\pi f q \varphi} = \int_0^\pi d\alpha \times \sin \alpha \int_0^l \frac{v + \frac{qv^3}{2f}}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} dv \quad (192)$$

l est donnée par l'équation 77, comme c'est une fonction de α on ne peut pas intervertir l'ordre des intégrations, nous allons donc opérer autrement. L'intégration par rapport à v est possible puisqu'il s'agit d'une fraction rationnelle, en appliquant les règles relatives à ces fonctions on trouve pour l'intégrale indéfinie :

$$\left| \begin{aligned} & \frac{qv^2}{4f} + \frac{qH}{f} v \cos \alpha \\ & + \left[1 + \frac{qH^2}{2f} (4 \cos^2 \alpha - 1) \right] \times \left[\frac{1}{2} L(v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2) + \cotg \alpha \operatorname{arctg} \frac{v - H \cos \alpha}{H \sin \alpha} \right] \\ & - \frac{qH^2}{f} \cotg \alpha \operatorname{arctg} \frac{v - H \cos \alpha}{H \sin \alpha} + \text{const.} \end{aligned} \right|$$

faisant $v = 0$ puis $v = l = H \cos \alpha + \sqrt{U^2 - H^2 \sin^2 \alpha}$ et retranchant, nous trouvons pour la valeur de l'intégrale par rapport à v dans la formule 192 :

$$\left| \begin{aligned} & \frac{ql^2}{4f} + \frac{qH}{f} l \cos \alpha \\ & + \left[1 + \frac{qH^2}{2f} (4 \cos^2 \alpha - 1) \right] \times \left[L \frac{U}{H} + \cotg \alpha \left(\arccos \frac{H \sin \alpha}{U} + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \\ & - \frac{qH^2}{f} \cotg \alpha \left(\arccos \frac{H \sin \alpha}{U} + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \end{aligned} \right| \quad (193)$$

il faut multiplier cette expression par $\sin \alpha d\alpha$ et intégrer de 0 à π .

Nous diviserons les termes en trois groupes ; le premier est formé des termes qui renferment $\arccos \frac{H \sin \alpha}{U}$ ou $\frac{\pi}{2}$, l'intégrale de ces termes de 0 à π est nulle, parce que si on change α en $\pi - \alpha$ ils changent de signe. Le second groupe comprend les termes suivants :

$$\left[1 + \frac{qH^2}{2f} (4 \cos^2 \alpha - 1) \right] \times \left(\sin \alpha L \frac{U}{H} - \alpha \cos \alpha \right) d\alpha + \frac{qH^2}{f} \alpha \cos \alpha d\alpha \quad (194)$$

l'intégrale de ces termes se déduit des formules suivantes

$$\int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = +2 \qquad \int_0^\pi \sin \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = +\frac{2}{3}$$

$$\int_0^\pi \alpha \cos \alpha d\alpha = \left[\cos \alpha + \alpha \sin \alpha \right]_0^\pi = -2$$

$$\int_0^{\pi} \alpha \cos^3 \alpha \, d\alpha = \left[\alpha \left(\sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha \right) + \frac{2}{3} \cos \alpha + \frac{1}{9} \cos^3 \alpha \right]_0^{\pi} = -\frac{14}{9}$$

on trouve ainsi pour valeur de l'intégrale de l'expression 194 de 0 à π :

$$2 \left(1 + \frac{qH^3}{6f} \right) L \frac{U}{H} + 2 + \frac{qH^3}{9f} \quad (195)$$

Enfin le troisième groupe, qui comprend les termes en l , est :

$$\left(\frac{ql^3}{4f} + \frac{qH}{f} l \cos \alpha \right) \sin \alpha \, d\alpha \quad (196)$$

pour intégrer ces termes nous prendrons l pour variable, comme aux nos 24 et 27, l'expression 196 devient

$$-\frac{q}{4fH} \left[\frac{l^3}{2} + \frac{1}{2} (U^2 - H^2) l - \frac{(U^2 - H^2)^2}{l^2} \right] dl \quad (197)$$

aux limites 0 et π pour α , correspondent pour l les limites $U + H$ et $U - H$. L'intégrale indéfinie de l'expression 197 est :

$$-\frac{q}{4fH} \left[\frac{l^3}{2} + \frac{1}{2} (U^2 - H^2) l + \frac{(U^2 - H^2)^2}{l} \right] + \text{const.}$$

et en prenant pour limites $U + H$ et $U - H$ on trouve :

$$+\frac{q}{2fH} (HU^3 + H^3) \quad (198)$$

En additionnant les expressions 195 et 198 nous avons finalement la valeur du second membre de la formule 192, de sorte que :

$$P'_2 \times \frac{1}{\pi f q \varphi} = \left(2 + \frac{qH^3}{3f} \right) L \frac{U}{H} + 2 + \frac{qU^3}{2f} + \frac{qH^3}{f} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9} \right) \quad (199)$$

Cette formule et la formule 188 sont identiques.

49. — Substituons dans les formules que nous venons de trouver les valeurs numériques considérées précédemment (nos 10, 26, 38)

$q = 2$, $f = 1$, $V = 0,1$, $U = 1, 10, 100$ et $H = 0,25$ valeur de Struve (nos 20 et 26).

La formule 187 ou 191 nous donne pour $\frac{P'}{\pi f q \varphi}$ la valeur

$$0,1654$$

La formule 188 ou 199 nous donne pour $\frac{P'_2}{\pi f q \varphi}$ les valeurs :

U	
1	5,9068
10	109,6080
100	10014,3092

Le rapport du nombre des orbites de demi grand axe supérieur à 100 (en valeur absolue) au nombre des orbites de demi grand axe inférieur à 100, parmi les comètes visibles qui passent au périhélie pendant un certain temps, est $\frac{P'}{P'_2 - P'}$; nous obtenons ainsi pour ce rapport les valeurs suivantes :

U	
1	0,0288
10	0,001 511
100	0,000 017

D'après ces nombres la presque totalité des comètes seraient sensiblement hyperboliques, par exemple pour $U = 1$, limite probablement trop faible, comme $0,0288 = \frac{1}{34,7}$ il y aurait seulement une orbite non sensiblement hyperbolique pour 35 orbites sensiblement hyperboliques.

J'ai aussi calculé les valeurs de $\frac{P'}{\pi f q \varphi}$ pour une série de valeurs de V , en admettant toujours $q = 2$, $H = 0,25$; ce calcul a été fait au moyen de la formule 191, qui convient à la condition que $V < U - H$. Voici les nombres obtenus :

V	$\frac{P'}{\pi f q \varphi}$	V	$\frac{P'}{\pi f q \varphi}$
0,1	0,1654	1,0	5,822
0,2	0,7516	2,0	10,254
0,3	2,1557	3,0	16,085
0,4	2,9785	4,0	23,673
0,5	3,5851	5,0	33,130
0,6	4,0978	6,0	44,50
0,7	4,5601	7,0	57,82
0,8	4,9938	8,0	73,08
0,9	5,4118	9,0	90,33
		10,0	109,53

Ces nombres montrent que non seulement on devrait rencontrer beaucoup d'orbites hyperboliques de demi grand axe inférieur à 100, mais même un nombre considérable d'orbites hyperboliques avec grand axe beaucoup plus petit. Supposons par exemple $U=1$, nous avons trouvé $\frac{P'}{\pi f q \varphi} = 5,9068$ ce nombre est à peu près double de la valeur de $\frac{P'}{\pi f q \varphi}$ pour $V=0,4$, il y aurait donc la moitié des comètes pour lesquelles la vitesse initiale dépasserait 0,4 et dont par conséquent le demi grand axe serait inférieur à $\frac{1}{(0,4)^2}$ ou 6,25.

D'après ce que nous avons dit n° 20, on peut vraisemblablement supposer $U=3$, alors le nombre des comètes pour lesquelles la vitesse initiale est inférieure à 1 et le nombre total ⁽¹⁾ sont entre

(1) On remarque que les valeurs de $\frac{P'}{\pi f q \varphi}$ pour $U=1$ et $U=10$ ne diffèrent pas des valeurs de $\frac{P'}{\pi f q \varphi}$ pour $V=1$ et $V=10$ si on se borne à prendre une décimale, donc pour $U=3$ on peut prendre la valeur de $\frac{P'}{\pi f q \varphi}$ égale à celle de $\frac{P'}{\pi f q \varphi}$ pour $V=3$.

eux dans le rapport $\frac{5,8}{16,1}$ ou à peu près $\frac{1}{3}$, donc les deux tiers des orbites seraient hyperboliques avec $v > 1$, c'est à dire avec demi grand axe inférieur au rayon de l'orbite terrestre.

Afin de voir ce qui se passerait si l'on supposait la vitesse du Soleil plus petite que 0,25, j'ai fait aussi l'hypothèse $H = 0,01$, j'ai alors trouvé pour $\frac{P'}{\pi f q \varphi}$ les valeurs suivantes, pour quatre valeurs de V

V	
0,1	6,612
0,5	10,074
1,0	12,211
3,0	22,41

Ces nombres donnent encore beaucoup d'orbites très fortement hyperboliques. Avec $H = 0,01$ la valeur de $\frac{P'_2}{\pi f q \varphi}$ sera évidemment très voisine de la valeur de $\frac{P'}{\pi f q \varphi}$ pour $V = U$. Si nous supposons $U = 3$ il y a près de la moitié des orbites pour lesquelles $v > 1$, donc pour lesquelles le demi grand axe est inférieur au rayon de l'orbite terrestre. Si $U = 1$ il y a $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ des orbites pour lesquelles $v > 0,5$, donc pour lesquelles le demi grand axe est inférieur à $\frac{1}{0,25} = 4$.

Nous trouvons donc, même avec une très petite valeur de H, un grand nombre d'orbites très fortement hyperboliques.

Il nous reste encore à chercher, comme au n° 39, quel doit être le nombre total des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps, c'est-à-dire la valeur de P'_2 . Pour cela désignons par N les valeurs de $\frac{P'_2}{\pi f q \varphi}$ que nous venons de calculer et par N_2 le nombre total des comètes contenues dans l'unité de volume aux limites de la sphère d'activité du Soleil, nous avons :

$$P'_2 = \pi f q \varphi N \quad N_2 = \int_0^U \varphi dv = U \varphi$$

donc

$$\frac{P'_2}{N_2} = \frac{\pi f q}{U} N$$

Nous obtenons ainsi les valeurs suivantes, dans le cas $H = 0,25$
 $q = 2$

U	$\frac{P'_2}{N_2}$
1	37,11
10	68,87
100	629,22

Nous avons vu n° 39 que ces nombres indiquent combien de comètes doivent se trouver dans chaque unité de volume, dans les régions de l'espace éloignées du Soleil.

50.— Examinons si l'accumulation des demi grands axes au voisinage de la valeur $-\frac{1}{H^2}$, signalée dans le premier chapitre (n°s 11 et 28), subsiste parmi les comètes qui passent au périhélie pendant un certain temps. Suivons la même marche qu'au n° 28, en différentiant la formule 177 par rapport à V , nous trouvons, lorsque $\varphi(h)$ est une constante, que le nombre des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps avec des vitesses initiales entre $V, V + dV$ est :

$$dV \times \pi f q \varphi \left(V + \frac{qV^3}{2f} \right) \int_0^\pi \frac{\sin \alpha}{V^2 - 2VH \cos \alpha + H^2} d\alpha \quad (200)$$

Cette formule n'est autre que la formule 114 multipliée par V , en effectuant l'intégration par rapport à α comme au n° 28 elle devient

$$dV \times \frac{\pi f q \varphi}{2VH} \left(V + \frac{qV^3}{2f} \right) L \left(\frac{V+H}{V-H} \right)^2 \quad (201)$$

Cette expression devient infinie pour $V = H$ et il y a à ce sujet à dire les mêmes choses que pour l'expression 115 ; en prenant ϵ très petit, on peut donc faire que les orbites de vitesses initiales comprises entre $H \pm \epsilon$ soient beaucoup plus probables que celles pour lesquelles cette vitesse est entre $V \pm \epsilon$, mais il n'en résulte pas que la plupart des orbites aient des valeurs très voisines de H , et les remarques faites n° 28 s'appliquent encore mieux ici parce que la multiplication par le facteur V augmente beaucoup le nombre des comètes dont la vitesse initiale est grande. Pour se rendre exactement compte du nombre des comètes qui ont diverses vitesses initiales il suffit de parcourir le tableau des valeurs de $\frac{P'}{\pi f q \varphi}$ placé au numéro précédent, on voit en effet que dans l'intervalle $V = 0,2$ à $V = 0,3$ qui comprend la vitesse du Soleil (0,25) il y a plus de comètes que dans les intervalles de même grandeur voisins, mais non pas un nombre considérable relativement au nombre total ; et lorsqu'on arrive à $V = 7$, on trouve que dans l'intervalle $V = 7$ à $V = 8$ $\frac{P'}{\pi f q \varphi}$ augmente de 15,2, soit 1,52 pour la variation 0,1 de V , ce qui est supérieur au nombre 1,40 qui correspond à la variation de V de 0,2 à 0,3.

Ainsi l'accumulation des demi grands axes dans le voisinage de la valeur $-\frac{1}{H^2}$ est assez faible (1) parmi les comètes qui passent au périhélie pendant un certain temps, comme d'ailleurs elle peut disparaître tout à fait si la fonction $\varphi(h)$ n'est pas une constante, on ne doit pas regarder cette accumulation comme une loi nécessaire.

51. — Nous examinerons rapidement l'hypothèse $\varphi(h) = Mh^2$. Si l'on se sert des formules du n° 45, il n'y a aucune difficulté car on n'a à intégrer que des fonctions entières de h , je laisse au lecteur le soin de faire ce calcul s'il le désire à titre de vérification.

(1) On peut remarquer encore que $a = -\frac{f}{V^2}$ et $da = \frac{2f}{V^3} dV$, ce qui montre qu'à une même variation de V correspond une variation de a beaucoup plus forte pour les petites valeurs de V que pour les grandes.

Je vais me servir des formules du n° 43, qui conduisent aussi au but sans trop de peine ; on trouve d'abord par la formule 177, en remplaçant $\varphi(h)$ par Mh^2 :

$$\frac{P'}{\pi/qM} = \int_0^{\pi} d\alpha \times \sin \alpha \int_0^v \left(v + \frac{qv^3}{2f} \right) dv \quad (202)$$

les intégrations ne présentent pas de difficulté, faisons d'abord celle relative à V :

$$\frac{P'}{\pi/qM} = \int_0^{\pi} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{qV^4}{8f} \right) \sin \alpha \, d\alpha$$

en effectuant maintenant l'intégration par rapport à α on obtient :

$$\frac{P'}{\pi/qM} = V^2 + \frac{qV^4}{4f} \quad (203)$$

Pour le nombre total des comètes qui passent au périhélie dans l'unité de temps, on a :

$$\frac{P'_2}{\pi/qM} = \int_0^{\pi} d\alpha \times \sin \alpha \int_0^l \left(v + \frac{qv^3}{2f} \right) dv \quad (204)$$

et en intégrant par rapport à v :

$$\frac{P'_2}{\pi/qM} = \int_0^{\pi} \left(\frac{l^2}{2} + \frac{ql^4}{8f} \right) \sin \alpha \, d\alpha \quad (205)$$

l étant une fonction de α l'intégration offre une petite difficulté qu'on résout en prenant l pour variable, la formule 205 devient alors

$$\frac{P'_2}{\pi f q M} = \int_{U+H}^{U-H} \left(\frac{l^2}{2} + \frac{q l^4}{8f} \right) \frac{H^2 - U^2 - l^2}{2H l^2} dl$$

et l'intégration n'offre plus de difficulté, on obtient

$$\frac{P'_2}{\pi f q M} = \frac{1}{4H} \left[\frac{q l^5}{20f} + \frac{q}{12f} (U^2 - H^2) l^3 + \frac{l^3}{3} + (U^2 - H^2) l \right]_{U-H}^{U+H}$$

ou

$$\frac{P'_2}{\pi f q M} = \frac{q}{4f} \left(U^4 + \frac{2}{3} H^2 U^2 - \frac{1}{15} H^4 \right) + U^2 - \frac{H^2}{3} \quad (206)$$

Les formules 203 et 206 résolvent la question dans le cas $\varphi(h) = Mh^2$. La formule 203 ne renferme pas la vitesse du Soleil, il fallait s'y attendre de même que pour la formule 123 du n° 29.

Faisons quelques substitutions numériques, avec $q=2$, $f=1$ on trouve pour la formule 203 les valeurs suivantes :

V	$\frac{P'}{\pi f q M}$	V	$\frac{P'}{\pi f q M}$
0,1	0,0100	1,0	1,5
0,2	0,0408	2,0	12,0
0,4	0,1728	4,0	144,0
0,6	0,4248	6,0	684,0
0,8	0,8448	8,0	2112,0
		10,0	5100,0

Pour $\frac{P'_2}{\pi f q M}$, avec $H=0,25$, nous trouvons pour diverses valeurs de U :

U	
1	1,4998
10	5 102,0623
100	50 010 208,3123

Il suffit de parcourir ces valeurs pour voir que dans l'hypothèse $\varphi(h) = Mh^2$ il y a un nombre considérable d'orbites fortement hyperboliques.

Enfin en appelant N la valeur de $\frac{P'_2}{\pi f q M}$ et N_2 le nombre total des comètes contenues dans l'unité de volume à la limite de la sphère d'activité du Soleil, nous avons :

$$P'_2 = \pi f q M N \qquad N_2 = \int_0^U M h^2 dh = \frac{1}{3} M U^3$$

donc

$$\frac{P'_2}{N_2} = \frac{3 \pi f q}{U^3} N$$

d'où pour $\frac{P'_2}{N_2}$ les valeurs suivantes :

U	
1	28,27
10	96,17
100	942,67

52. — Peut-on concevoir une fonction $\varphi(h)$ telle que les orbites sensiblement hyperboliques soient rares ? Si la vitesse du Soleil n'est pas très petite cela n'est pas possible ; le théorème suivant le prouve :

Quelle que soit la fonction $\varphi(h)$, parmi les comètes visibles qui passent au périhélie pendant un certain temps, le nombre des comètes dont la vitesse relative initiale est supérieure à la vitesse du Soleil H est plus grand que le nombre de celles dont la vitesse relative initiale est inférieure à H .

Nous démontrerons ce théorème en prouvant qu'il a lieu en particulier pour les comètes dont les vitesses absolues initiales sont entre h et $h + dh$. Pour avoir parmi ces comètes celles dont la vitesse relative initiale est inférieure à H , il faut faire $V = H$ dans la formule 182, le nombre total des comètes est donné par la formule 183 ; il faut donc prouver que la formule 182 avec $V = H$

est inférieure à la moitié de la formule 183. Nous distinguerons deux cas à cause du double signe. Il suffit de considérer la quantité entre crochets, le facteur qui la multiplie étant le même dans les deux formules.

1° $h < H$, il faut prendre le signe — .

Avec $V = H$ le crochet de la formule 182 devient

$$H \left(1 + \frac{qH^2}{6f} \right) - (H - h) \left(1 + \frac{q(H - h)^2}{6f} \right)$$

ou

$$h + \frac{q}{6f} [H^3 - (H - h)^3] \quad (207)$$

Le crochet de la formule 183 est

$$2h + \frac{q}{6f} [(H + h)^3 - (H - h)^3] \quad (208)$$

Si nous comparons les formules 207 et 208, nous trouvons d'abord les termes h et $2h$, le second est double du premier ; les termes suivants, en supprimant le facteur $\frac{q}{6f}$ et développant, deviennent :

$$3H^2h - 3Hh^2 + h^3 \quad \text{et} \quad 6H^2h + 2h^3$$

la seconde de ces quantités est supérieure au double de la première. Donc la formule 208 est plus que double de la formule 207.

2° $h > H$, il faut prendre le signe + .

Avec $V = H$, le crochet de la formule 182 devient

$$2H - h + \frac{q}{6f} [H^3 + (H - h)^3] \quad (209)$$

le crochet de la formule 183 est

$$2H + \frac{q}{6f} [(H + h)^3 + (H - h)^3] \quad (210)$$

D'abord en ce qui concerne les termes qui ne renferment pas $\frac{q}{6f}$, celui de la formule 210 est plus du double de ceux de la formule 209, car de $h > H$ résulte $2H - h < H$; développant ensuite les quantités qui multiplient $\frac{q}{6f}$ on trouve

$$2H^3 - 3H^2h + 3Hh^2 - h^3 \quad \text{et} \quad 2H^3 + 6Hh^2$$

supprimant les termes $3Hh^2$ et $6Hh^2$, dont le premier est la moitié du second, il reste

$$2H^3 - 3H^2h - h^3 \quad \text{et} \quad 2H^3$$

La première de ces quantités est moins de la moitié de la seconde, car comme $h > H$, $2H^3 - h^3$ est inférieur à H^3 . On voit donc que la formule 210 est plus que double de la formule 209.

Ainsi parmi les comètes visibles dont la vitesse absolue initiale est entre h et $h + dh$ qui passent au périhélie pendant l'unité de temps, il y en a plus de la moitié dont la vitesse relative initiale surpasse H ; ce théorème ayant lieu quelle que soit h , a lieu pour la totalité des comètes visibles qui passent au périhélie pendant un temps donné

Ce théorème est intéressant en ce qu'il est indépendant de la fonction $\varphi(h)$, il suppose uniquement que les vitesses sont uniformément réparties en direction et que la fonction $\varphi(h)$ est la même dans les régions éloignées du Soleil dans toutes les directions.

Avec la valeur $H = 0,25$ il y aurait plus de la moitié des comètes visibles dont la vitesse initiale surpasserait 0,25, par conséquent dont le demi grand axe serait inférieur à $\frac{1}{(0,25)^2} = 16$. Des orbites aussi fortement hyperboliques ne passeraient sûrement pas inaperçues.

53. — Nous avons vu n° 42 que lorsqu'on suppose le Soleil immobile, on peut tenir compte de ce que la probabilité de la décou-

verte d'une comète change avec les éléments de son orbite. Lorsqu'on tient compte du mouvement du Soleil cette question est difficile à résoudre, parce qu'alors le nombre des orbites de grand axe donné dépend de la direction d'où viennent les comètes, par conséquent des divers éléments des orbites. Il en résulte que pour une distance périhélie fixée le rapport réel et le rapport observé entre les nombres des orbites de grands axes inférieurs et supérieurs à une certaine limite ne sont pas nécessairement égaux.

Toutefois la méthode du n° 42 nous permettra de connaître le nombre des orbites de grand axe donné pour chaque distance périhélie ; ici P' est donné par la formule 184, de sorte que la formule 172 est remplacée par la suivante :

$$\frac{dP'}{dq} = \int_{H-v}^{H+v} \frac{df_3(h)}{dq} dh \quad (211)$$

avec

$$\frac{df_3(h)}{dq} = \frac{q(h)}{Hh} \pi f \left[v \left(1 + \frac{qV^2}{3f} \right) \mp (H-h) \left(1 + \frac{q(H-h)^2}{3f} \right) \right] \quad (212)$$

expression qu'on obtient en différentiant la formule 182 par rapport à q . On obtient une autre expression de $\frac{dP'}{dq}$ en différentiant la formule 177.

54. — Il résulte des calculs précédents que lorsqu'on tient compte du mouvement du Soleil, les comètes visibles qui passent au périhélie pendant un temps donné doivent toutes (à un infiniment petit près) décrire des hyperboles, et la plupart doivent avoir un caractère hyperbolique très prononcé. Supposerait-on même la vitesse du Soleil beaucoup plus petite que 0,25 on n'échapperait pas à cette conclusion, en effet les nombres que nous avons obtenus avec la valeur très faible $H=0,01$ montrent que même dans ce cas il y a beaucoup d'orbites fortement hyperboliques, à moins qu'on suppose aussi que la limite supérieure U des vitesses des comètes est

petite, car la plus grande vitesse relative est $H + U$. Ainsi l'absence des orbites fortement hyperboliques ne peut avoir lieu que si la vitesse du Soleil et les vitesses des corps répandus dans l'espace sont très petites ; ce que nous savons de ces vitesses (n° 20) ne permet pas d'admettre qu'il en soit ainsi. La théorie qui fait venir les comètes des espaces interstellaires ne peut donc pas être admise.

On fera peut-être des objections sur lesquelles je dois présenter quelques remarques. D'abord on pourrait objecter qu'une hyperbole de demi grand axe 100 sera peut-être difficile à distinguer de la parabole, mais nous avons vu que ce n'est pas seulement les hyperboles de demi grand axe un peu inférieur à 100 qui devraient être nombreuses, et qu'il devrait fréquemment se présenter des orbites dont le demi grand axe serait égal à un petit nombre de fois le rayon de l'orbite terrestre ou même inférieur à ce rayon ; il est inadmissible que de telles orbites soient prises pour des paraboles. En outre, si l'on examine les formules du mouvement dans une orbite peu différente de la parabole, on ne voit aucune raison pour que le caractère hyperbolique soit plus difficile à déceler que le caractère elliptique. Or il existe plusieurs comètes qui non seulement ont été reconnues elliptiques après une seule apparition, mais même dont on a pu prédire le retour avec exactitude, laissant de côté les courtes périodes, les comètes de Pons et d'Olbers en sont de frappants exemples. On ne peut donc pas objecter que le caractère hyperbolique ne pourrait pas être reconnu. Il faut aussi remarquer que si presque toutes les comètes s'écartaient de la parabole toujours vers l'hyperbole, ces écarts fussent-ils même très faibles, ils ne passeraient pas inaperçus, et les observations ne montrent rien de semblable.

Au sujet de la supposition que le mouvement du Soleil est rectiligne et uniforme, remarquons que d'une part ce mouvement reste sûrement tel pendant un temps très considérable, et que d'autre part les résultats étant indépendants du rayon de la sphère d'activité du Soleil, on peut restreindre cette sphère sans les changer.

Les partisans de la théorie qui regarde les comètes comme étrangères au système solaire ont encore la ressource de se retran-

cher derrière l'existence supposée d'un milieu résistant qui changerait les résultats ; l'étude de l'effet d'un tel milieu ne rentre pas dans le cadre de mon travail, je ferai seulement observer que pour produire l'effet désiré, c'est-à-dire rendre paraboliques des orbites fortement hyperboliques, ce milieu devrait être fort résistant ou s'étendre à une distance considérable du Soleil, les mouvements des planètes et des comètes périodiques ne permettent de supposer qu'une très faible résistance, il faudrait donc admettre que ce milieu s'étend à une très grande distance du Soleil. En outre, ce milieu résistant ne devrait pas être en repos dans l'espace, il devrait être animé du moment du Soleil, sans cela s'opposant au mouvement absolu et non au mouvement relatif, il ne rendrait pas les orbites paraboliques, on serait donc amené à des hypothèses arbitraires.

Quant à la théorie mixte de M. Davis (n° 32) cet auteur pouvait l'admettre parce que, ne tenant pas compte du mouvement du Soleil, il supposait que la moitié des orbites sont elliptiques ; mais la faible diminution de vitesse qu'il trouve devoir être produite par le milieu résistant modifierait à peine les orbites hyperboliques.

CONCLUSION DES DEUX PREMIERS CHAPITRES

55.— Ici se termine ce que j'ai à dire sur la probabilité des orbites hyperboliques, je vais donc présenter un résumé sommaire des résultats que nous avons obtenus sur cette intéressante question.

La plupart des auteurs qui se sont occupés de rechercher la probabilité des orbites hyperboliques avec petites distances périhéliques, ont considéré les comètes dans les régions de l'espace très éloignées du Soleil ; leurs formules, bien qu'exactes au point de vue mathématique, ne donnent pas la vraie solution de la question, parce que c'est seulement dans le voisinage du Soleil que nous observons ces astres.

M. Davis a bien considéré les comètes dans le voisinage du Soleil,

mais son calcul ne tient pas compte du mouvement propre du système solaire.

Les formules données par ces divers auteurs (celles de Laplace étant rectifiées comme il a été dit), sont parfaitement d'accord entre elles, si les résultats auxquels elles conduisent ne s'accordent pas c'est que chaque auteur s'est placé à un point de vue différent, et les résultats doivent en effet être différents selon qu'on suppose le Soleil immobile ou qu'on tient compte de son mouvement propre et selon qu'on compte les comètes très loin du Soleil ou près de cet astre.

1° Dans les régions très éloignées du Soleil :

Si l'on suppose le Soleil immobile, le nombre des comètes visibles (1) hyperboliques dépend beaucoup de la fonction $\varphi(h)$. Dans le cas où cette fonction est une constante les comètes hyperboliques sont rares, mais si $\varphi(h)$ tend vers zéro avec h il peut y avoir beaucoup de comètes visibles fortement hyperboliques.

Si l'on tient compte du mouvement propre du Soleil, toutes les orbites seront des hyperboles ; et en général les orbites fortement hyperboliques seront nombreuses, leur nombre dépend de la vitesse du Soleil et de la fonction $\varphi(h)$.

2° Parmi les comètes visibles qui passent au périhélie pendant un certain intervalle de temps :

Si le Soleil est immobile dans l'espace, le nombre des orbites hyperboliques dépend de la fonction $\varphi(h)$; dans le cas où cette fonction est constante depuis $h = 0$ jusqu'à une limite voisine de la vitesse de la Terre et nulle ensuite, il y a à peu près le même nombre d'ellipses et d'hyperboles et une assez forte proportion d'orbites très sensiblement hyperboliques.

Si l'on tient compte du mouvement du Soleil, toutes les orbites

(1) Je rappelle que nous appelons « comètes visibles » les comètes dont la distance périhélie est inférieure à une certaine limite, et que $\varphi(h)$ est la fonction qui indique le nombre des vitesses de chaque grandeur.

doivent être hyperboliques ; et un grand nombre fortement hyperboliques, à moins que la vitesse du Soleil et celles de toutes les comètes répandues dans l'espace ne soient très petites. En désignant la vitesse du Soleil par H , quelle que soit la fonction $\varphi(h)$, plus de la moitié des orbites ont leurs demi grands axes inférieurs à $\frac{1}{H^2}$, en valeur absolue.

L'absence des orbites fortement hyperboliques, parmi les comètes que nous voyons passer au périhélie est inexplicable dans la théorie qui fait venir ces astres des espaces interstellaires ; nous concluons donc finalement que cette théorie doit être rejetée et que les comètes sont des membres permanents du Système solaire.

CHAPITRE III

DISPOSITION THÉORIQUE DES ÉLÉMENTS AUTRES QUE LE GRAND AXE

Dans les deux premiers chapitres nous nous sommes occupés seulement du grand axe des orbites, nous allons maintenant chercher comment les autres éléments devraient être disposés si les comètes venaient des espaces interstellaires. La forme et la position d'une orbite étant déterminée par cinq éléments, nous en avons encore quatre à étudier, nous prendrons pour ces éléments : la distance périhélie, la direction asymptotique du côté où la comète nous arrive, et enfin réunissant ensemble l'inclinaison et la longitude du nœud nous étudierons la disposition des plans des orbites.

Distances périhélie.

56. — Pour avoir la loi des distances périhélie il n'est pas besoin de nouvelles formules, q ayant été laissé arbitraire dans les formules du chapitre II qui donnent le nombre des comètes qui passent au périhélie dans l'unité de temps, il suffit de regarder cette quantité q comme variable pour avoir la loi des distances périhélie soit pour la totalité des comètes, soit seulement pour celles dont le grand axe est compris entre certaines limites.

Occupons-nous seulement de la totalité des comètes et examinons d'abord le cas où le Soleil serait immobile dans l'espace. Alors le nombre des comètes qui passent au périhélie dans l'unité de temps est donné par la formule 161, où pour avoir le nombre total des comètes on doit remplacer V par la limite supérieure des vitesses, que

nous désignerons par U . La différentiation de la formule 161 par rapport à q donnera le nombre des distances périhéliques comprises entre q et $q + dq$. Cette différentiation a été déjà faite et a donné la formule 172.

Les formules 161 et 172 renferment q non seulement dans la quantité placée sous le signe \int , mais encore dans A qui est l'une des limites de l'intégration. Il en résulte que la loi des distances périhéliques dépend des valeurs de la fonction $\varphi(v)$ pour de très petites valeurs de v . En effet, donnons d'abord à q une valeur q_1 , à laquelle correspond pour A une valeur A_1 , la formule 172 peut s'écrire :

$$2\pi f \int_{A_1}^U \frac{\varphi(v)}{v} dv + 2\pi q_1 \int_{A_1}^U \left(v - \frac{2f}{vr} \right) \varphi(v) dv$$

les valeurs des intégrales dépendent des valeurs de $\varphi(v)$ pour v entre A_1 et U . Donnons ensuite à q une valeur q_2 plus petite que q_1 , à laquelle correspond pour A une valeur A_2 plus petite que A_1 , le premier terme et le coefficient de q dans le second se trouvent augmentés de :

$$2\pi f \int_{A_2}^{A_1} \frac{\varphi(v)}{v} dv \quad \text{et} \quad 2\pi \int_{A_2}^{A_1} \left(v - \frac{2f}{vr} \right) \varphi(v) dv$$

ces deux quantités dépendent des valeurs de $\varphi(v)$ pour v entre A_2 et A_1 , c'est-à-dire pour de très petites valeurs de v .

Donc si l'on suppose le Soleil immobile dans les espaces stellaires, la loi des distances périhéliques dépend beaucoup de la fonction $\varphi(h)$, si cette fonction est donnée nos formules font connaître cette loi. Dans le cas par exemple où φ est une constante, la formule 164 où q est regardé comme variable donne la loi des distances périhéliques; si l'on suppose $\varphi(v) = Mv^2$, ce sera la formule 169 (en faisant $V = U$). Afin de montrer des exemples des lois qu'on peut ainsi obtenir, nous donnons ci-dessous les nombres des distances périhéliques pour des

valeurs de q de 0,2 en 0,2, calculés dans les deux suppositions φ constante et $\varphi(v) = Mv^2$ par les formules 164 et 169, avec $U = 1$ $r = 100\ 000$; pour qu'on puisse facilement comparer les deux lois, nous avons divisé les nombres donnés par les formules par le nombre qui correspond à $q = 1$ et multiplié ensuite par 100. De cette façon le nombre qui se trouve en face de $q = 0,4$ par exemple est le nombre des comètes de distances périhélies inférieures à 0,4 qui passent au périhélie dans le même temps que 100 comètes de distances périhélies entre 0 et 1.

$\varphi(v) = \text{constante}$			$(U = 1 \quad r = 100\ 000) \quad \varphi(v) = Mv^2$		
q		Différences	q		Différences
0	0		0	0	
		21,0			16,8
0,2	21,0		0,2	16,8	
		20,0			18,4
0,4	41,0		0,4	35,2	
		19,8			20,0
0,6	60,8		0,6	55,2	
		19,6			21,6
0,8	80,4		0,8	76,8	
		19,6			23,2
1,0	100,0		1,0	100,0	
		19,6			24,8
1,2	119,6		1,2	124,8	
		19,6			26,4
1,4	139,2		1,4	151,2	
		19,7			28,0
1,6	158,9		1,6	179,2	
		19,7			29,6
1,8	178,6		1,8	208,8	
		19,8			31,2
2,0	198,4		2,0	240,0	

57. — Tenons maintenant compte de la vitesse du Soleil. La loi des distances périhélies sera alors donnée par la formule 177, dans laquelle on regardera q comme variable, et si l'on veut avoir la loi des distances périhélies pour la totalité des comètes on remplacera V par ∞ ou par la quantité l donnée par l'équation 77. Cette loi est aussi donnée par la formule 186, dans laquelle au lieu de ∞ on peut

prendre pour limite supérieure de l'intégration la quantité U limite supérieure des vitesses des comètes répandues dans l'espace.

Que l'on fasse usage de l'une ou de l'autre formule, on voit que, quelle que soit la fonction $\varphi(h)$, le nombre des distances périhéliees inférieures à q est représenté par une expression de la forme :

$$C_1 q + C_2 q^2 \quad (213)$$

C_1 et C_2 étant deux quantités positives et indépendantes de q . Si l'on déduit ces quantités des formules 186 et 183, on trouve :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\pi f}{H} \int_0^U \frac{\varphi(h)}{h} [(H + h) \mp (H - h)] dh \\ C_2 &= \frac{\pi}{6H} \int_0^U \frac{\varphi(h)}{h} [(H + h)^3 \mp (H - h)^3] dh \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

Le signe — doit être pris pour $h < H$, le signe + pour $h > H$. Le rapport des quantités C_1 et C_2 dépend de la fonction $\varphi(h)$ de H et U .

Avec la formule 177 on trouve :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \pi f \int_0^\pi \int_0^l \frac{\varphi(\sqrt{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2})}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} v dv \times \sin \alpha d\alpha \\ C_2 &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \int_0^l \frac{\varphi(\sqrt{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2})}{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2} v^3 dv \times \sin \alpha d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (215)$$

l est donné en fonction de α par l'équation 77; on peut remplacer l par ∞ à la condition de faire attention de bien donner à :

$$\varphi(\sqrt{v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2})$$

la valeur convenable, valeur qui est nulle pour $v > l$.

Ces dernières valeurs de C_1 et C_2 nous conduisent à une remarque intéressante. Supposons que la vitesse du Soleil et la fonction $\varphi(h)$ soient telles que les orbites des comètes visibles soient toutes à peu près paraboliques (1), alors les valeurs de v un peu grandes ne nous donnent presque jamais de comètes visibles et peuvent être négligées. Comparons les valeurs 215 de C_1 et C_2 , les éléments des intégrations différent par le facteur $\frac{v^2}{2f}$ introduit dans C_2 ; si par exemple toutes les valeurs de v sont inférieures à 0,1 (avec $f=1$), C_2 sera sûrement inférieure à 0,005 C_1 . Donc C_2 sera négligeable relativement à C_1 et la loi des distances périhélies se réduit à $C_1 q$. Comme les orbites des comètes que nous voyons sont très peu différentes de la parabole et que le Soleil est certainement animé d'un mouvement propre (1), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si les comètes viennent des espaces interstellaires le nombre des distances périhélies comprises entre 0 et q doit être $C_1 q$, C_1 désignant une constante.

On peut remarquer que le rayon du Soleil étant $\frac{1}{214}$ du rayon de l'orbite terrestre, parmi 214 comètes qui viennent passer entre la Terre et le Soleil, une en moyenne tomberait sur le Soleil.

Directions asymptotiques.

58. — Si l'on suppose le Soleil immobile, les directions asymptotiques doivent être réparties uniformément dans toutes les directions (en admettant que la fonction φ soit la même dans toutes les directions). Il n'y a donc qu'à examiner le cas où le Soleil est en mouvement dans l'espace.

Considérons la formule 177 qui donne le nombre des comètes visibles qui passent au périhélie dans l'unité de temps avec des

(1) Nous admettons que la vitesse du Soleil n'est pas absolument nulle, car sans cela la formule 177 ne serait pas applicable.

vitesses initiales inférieures à V , si au lieu de chercher ce nombre pour les comètes qui nous viennent de tous les points de la sphère céleste nous voulons considérer seulement la portion de la sphère comprise entre les directions o et α , il faut prendre α au lieu de π pour limite supérieure de l'intégration ; ensuite si nous voulons nous restreindre aux comètes qui viennent des directions comprises entre α et $\alpha + d\alpha$ il faut différentier par rapport à α , ce qui donne :

$$\pi f q \times d\alpha \sin \alpha \int_0^V f(v, \alpha) v dv \quad (216)$$

Comme la surface de la sphère céleste comprise entre les directions α et $\alpha + d\alpha$ est $\frac{1}{2} \sin \alpha d\alpha$, la surface entière de la sphère étant l'unité, le nombre des comètes de vitesses initiales inférieures à V qui passent au périhélie dans l'unité de temps et nous viennent d'une petite surface $d\sigma$ de la sphère céleste située dans la direction α est :

$$d\sigma \times 2\pi f q \int_0^V f(v, \alpha) v dv \quad (217)$$

l'unité pour exprimer $d\sigma$ étant la surface entière de la sphère céleste.

Si au lieu des comètes dont la vitesse initiale est inférieure à V , nous considérons la totalité des comètes, il faut prendre pour V la plus grande des vitesses, c'est-à-dire la quantité l donnée par la formule 77, on peut prendre aussi ∞ car au-delà de la plus grande des vitesses la fonction φ et par suite la fonction f sont nulles. Ainsi le nombre des directions asymptotiques descendantes (1) qui se trouvent dans la surface $d\sigma$ est :

$$d\sigma \times 2\pi f q \int_0^l f(v, \alpha) v dv \quad (218)$$

(1) Nous appelons asymptote descendante celle de la branche de l'orbite par laquelle la comète vient vers nous.

La valeur de cette expression dépend de $\varphi(h)$ et de la vitesse du Soleil H.

59.—Examinons en particulier ce qui a lieu avec les deux fonctions $\varphi(h)$ que nous avons étudiées et prenons d'abord $\varphi(h) = Mh^3$ qui est le cas le plus simple, l'intégrale renfermée dans la formule 218, abstraction faite du facteur M, devient :

$$\int_0^l \left(1 + \frac{qv^2}{2f}\right) v dv = \frac{l^2}{2} + \frac{ql^4}{8f} \quad (219)$$

Lorsque α varie de 0 à π , l diminue d'une manière continue de $U + H$ à $U - H$ (j'admets $U > H$). Donc les régions de la sphère céleste où se trouvent le plus de directions asymptotiques descendantes sont celles situées à l'apex du Soleil, celles où il s'en trouve le moins sont les régions opposées, et en passant de l'apex à l'antiapex le nombre des directions asymptotiques diminue d'une manière continue. Le rapport du maximum au minimum est :

$$\frac{\frac{1}{2}(U + H)^2 + \frac{q}{8f}(U + H)^4}{\frac{1}{2}(U - H)^2 + \frac{q}{8f}(U - H)^4} \quad (220)$$

la valeur de ce rapport dépend de H et U.

Examinons maintenant le cas où $\varphi(h)$ serait une constante, les formules sont plus compliquées ; la valeur de l'intégrale renfermée dans la formule 218, abstraction faite du facteur φ , est donnée par la formule 193 (n° 48) qui montre que le nombre en question est une fonction assez compliquée de α . Mais nous pouvons encore voir qu'il y a maximum dans la direction de l'apex du Soleil et minimum dans la direction opposée. En effet, si après avoir donné à α une certaine valeur, nous augmentons cette valeur, l'expression 218 subit deux changements, d'abord la limite supérieure l de l'intégrale diminue,

ce qui tend à diminuer la valeur de l'intégrale, ensuite $\cos \alpha$ diminuant le dénominateur $v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2$ (formule 72) augmente de sorte que chaque élément est diminué, ce qui diminue encore la valeur totale de l'intégrale. Donc il y a encore maximum à l'apex du Soleil, minimum à l'antiapex et variation continue dans l'intervalle. Quant au rapport du maximum au minimum il est ici infini ; on peut le voir par le calcul direct de la formule 218 pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, ou encore au moyen de la formule 193. Dans cette formule pour $\alpha = 0$, $\cotg \alpha$ est infinie et $\arccos \frac{H \sin \alpha}{U}$ égal à $\arccos 0$ ou $\frac{\pi}{2}$, les termes en $\cotg \alpha$ sont donc infinis. Pour $\alpha = \pi$, $\cotg \alpha$ devient $-\infty$, mais les termes en $\cotg \alpha$, abstraction faite de leurs coefficients sont

$$\cotg \alpha \left(\arccos \frac{H \sin \alpha}{U} + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (221)$$

ce qui pour $\alpha = \pi$ prend la formule $\infty \times 0$. Mettant cette expression sous la forme

$$\frac{\arccos \frac{H \sin \alpha}{U} + \frac{\pi}{2} - \alpha}{\tg \alpha}$$

et prenant le rapport des dérivées, on trouve

$$\left(-\frac{\frac{H}{U} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{H^2}{U^2} \sin^2 \alpha}} - 1 \right) \cos^2 \alpha$$

ce qui montre que la vraie valeur pour $\alpha = \pi$ est $\frac{H}{U} - 1$. Il en résulte que pour $\alpha = \pi$ la formule 193 a une valeur finie, comme on devait s'y attendre par le fait que pour cette valeur de α le dénominateur de l'expression 72 étant $v^2 + 2vH + H^2$ n'est jamais nul et par suite la quantité sur le signe \int dans la formule 218 est toujours finie.

Il est à remarquer que le fait que le nombre des directions asymptotiques dans l'élément $d\sigma$ de la sphère céleste est égal à $d\sigma$ multiplié

par un coefficient qui devient infini à l'apex du Soleil n'a rien de contradictoire, et qu'il n'en résulte pas que toutes les comètes devraient venir de l'apex du Soleil, parce que cet apex est un simple point, donc une région nulle relativement à la sphère céleste ; il en résulte simplement que lorsqu'on se rapproche de ce point le nombre des directions asymptotiques subit un accroissement rapide.

60. — Si l'on fait sur $\varphi(h)$ d'autres hypothèses on trouvera pour la distribution des asymptotes descendantes d'autres lois ; remarquons d'abord que si la vitesse du Soleil était supérieure aux vitesses de toutes les comètes répandues dans l'espace, toutes les asymptotes descendantes auraient leurs directions dans un petit cercle de la sphère céleste dont l'apex du Soleil serait le pôle, comme nous l'avons déjà vu n° 23.

Y aura-t-il quelle que soit $\varphi(h)$ un maximum du nombre des directions asymptotiques descendantes à l'apex du Soleil et un minimum à l'antiapex ? C'est ce que nous allons examiner.

Pour cela commençons par considérer uniquement les valeurs de $\varphi(h)$ qui correspondent aux valeurs de h entre deux limites infiniment voisines, et supposons pour un instant que la fonction $\varphi(h)$ soit nulle pour toute autre valeur de h . C'est le cas considéré nos 24 et 45, il est inutile de reproduire ici tout ce qui a été dit dans ces numéros, il suffit de s'y reporter et on voit sans peine ce qui suit :

1° $h > H$, désignons par v la vitesse unique qui dans le cas actuel appartient aux comètes visibles venant d'une certaine direction (1) α , vitesse qui est la racine positive de l'équation

$$v^2 - 2vH \cos \alpha + H^2 = h^2 \quad (222)$$

le nombre des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps et qui viennent d'un élément de la sphère céleste situé dans la direction α est donné par la formule 84 multipliée par

(1) α , angle avec la vitesse du Soleil, définit une série de directions parmi lesquelles nous considérons une seule quelconque.

v , conformément au n° 45, c'est-à-dire, en supprimant les coefficients constants :

$$\left(1 + \frac{qv^2}{2f}\right) \frac{v^2}{v^2 + h^2 - H^2} \quad (223)$$

2° $h < H$, le nombre des comètes visibles qui passent au périhélie pendant l'unité de temps et nous viennent d'une direction α est, à un facteur constant près :

$$\left(1 + \frac{qv'^2}{2f}\right) \frac{v'^2}{H^2 - h^2 - v'^2} + \left(1 + \frac{qv''^2}{2f}\right) \frac{v''^2}{v''^2 + h^2 - H^2} \quad (224)$$

v' et v'' sont les deux racines de l'équation 222, qui sont toutes deux positives.

Dans le premier cas ($h > H$) lorsque l'angle α croit de 0 à 2π , c'est-à-dire lorsqu'on va de l'apex du Soleil à l'antiapex, v diminue d'une manière continue de $h + H$ à $h - H$. Dans l'expression 223 le premier facteur diminue, le second facteur étant une fraction inférieure à l'unité dont les deux termes diminuent d'une même quantité diminue aussi, donc l'expression 223 diminue d'une manière continue de l'apex à l'antiapex du Soleil.

Le second cas ($h < H$) présente un phénomène tout autre. On voit en effet que pour $v'^2 = v''^2 = H^2 - h^2$, ce qui a lieu pour $\sin \alpha = \frac{h}{H}$, l'expression 224 devient infinie ; le maximum de fréquence des asymptotes descendantes ne se trouve donc plus à l'apex du Soleil, mais tout le long d'un petit cercle de la sphère céleste ayant cet apex pour pôle, et lorsqu'on se rapproche de ce cercle le nombre des asymptotes augmente considérablement pour tomber à zéro dès qu'on l'a dépassé. Ce fait qui peut paraître étrange au premier abord est très naturel, et on s'en rend très bien compte en remarquant que le volume détaché par l'hyperboloïde dans l'espace compris entre les deux sphères de rayon $h, h + dh$, qui renferme les extrémités des vitesses, augmente rapidement lorsque l'hyperboloïde devient presque tangent à ces sphères.

Passons maintenant au cas où $\varphi(h)$ est une fonction quelconque de

h ; pour avoir le nombre des asymptotes descendantes dans une direction donnée, il faut faire la somme des nombres qui correspondent aux diverses valeurs de h . Divisons la sphère céleste en deux hémisphères par un plan perpendiculaire au mouvement du Soleil. Dans l'hémisphère qui renferme l'antiapex du Soleil toutes les comètes visibles proviennent de valeurs de h supérieures à H , nous venons de voir que dans ce cas pour chaque valeur de h le nombre des asymptotes descendantes augmente d'une manière continue à partir de l'antiapex. Donc, quelle que soit $\varphi(h)$, le nombre des directions asymptotiques descendantes augmente d'une manière continue depuis l'antiapex jusqu'aux directions perpendiculaires au mouvement du Soleil.

Dans l'hémisphère qui renferme l'apex du Soleil, il résulte de ce que nous venons de dire pour une valeur unique de h inférieure à H , que la loi peut être plus compliquée, et on peut imaginer des fonctions $\varphi(h)$ telles que le maximum de fréquence des asymptotes descendantes ne soit pas à l'apex du Soleil, mais soit tout le long d'un petit cercle ayant cet apex pour pôle ; ceci se présentera si les vitesses des corps répandus dans l'espace présentent un maximum de fréquence suffisant autour d'une certaine valeur inférieure à la vitesse du Soleil.

Disposition des plans des orbites.

61. — Il est d'abord facile de voir que si les comètes viennent des espaces interstellaires, le nombre des mouvements directs et rétro-

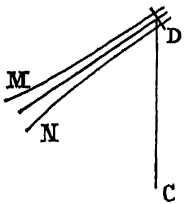


Fig. 14

grades doit être le même, et cela que le Soleil soit immobile ou en mouvement. En effet, par l'axe de l'hyperboloïde à l'intérieur duquel se trouvent les extrémités des vitesses des comètes visibles, menons un plan quelconque ; toute vitesse dont l'extrémité est sur ce plan et à l'intérieur de l'hyperboloïde correspond à une comète visible dont l'orbite est dans ce plan, si le

Soleil est immobile, dans un plan parallèle mené par le point C si le Soleil est en mouvement. Le mouvement de la comète est direct ou rétrograde selon que l'extrémité de la vitesse est d'un côté de l'axe entre cet axe et la branche d'hyperbole M ou de l'autre côté entre l'axe et la branche N, or la probabilité que l'extrémité de la vitesse soit dans l'une ou l'autre de ces régions est la même. Cela est évident si le Soleil est immobile, les vitesses absolues ayant alors pour origine le centre de l'hyperboloïde. Si le Soleil est en mouvement c'est encore à peu près évident à cause de l'extrême minceur de l'hyperboloïde, et si l'évidence ne paraît pas complète, il suffit de se reporter au n° 44 où nous avons montré que les directions des vitesses des comètes visibles peuvent être regardées comme distribuées uniformément autour du centre de l'hyperboloïde entre son axe et sa surface.

On voit donc qu'à une orbite directe quelconque doit correspondre une orbite rétrograde, les deux orbites ayant le même plan, la même distance périhélie, la même valeur du grand axe et la même direction asymptotique descendante ; par conséquent, si elles diffèrent très peu de paraboles, ces deux orbites seront identiques mais parcourues en sens inverse.

Pour étudier la disposition des plans des orbites, nous imaginerons que par le centre de la sphère céleste on mène des droites perpendiculaires à ces plans. Ces droites percent la sphère céleste en deux points que nous appellerons les pôles de l'orbite. On peut distinguer ces deux pôles l'un de l'autre, en supposant un observateur ayant les pieds sur le plan de l'orbite et la tête sous l'un des pôles, et appelant pôle positif celui pour lequel l'observateur voit le mouvement de la comète s'effectuer dans le sens direct (de droite à gauche), pôle négatif celui pour lequel l'observateur voit le mouvement s'effectuer dans le sens rétrograde.

D'après ce que nous venons de dire, à une orbite directe quelconque dont le pôle positif est en P et le pôle négatif en P' correspondra une orbite rétrograde ayant son pôle positif en P' et son pôle négatif en P. Il en résulte que la disposition des pôles des

orbites est symétrique par rapport au centre de la sphère céleste, et par conséquent soit qu'on considère seulement l'un des pôles, le pôle positif par exemple, soit qu'on les considère tous deux sans les distinguer l'un de l'autre, la disposition est la même; dans le second cas, il y a seulement en chaque point de la sphère céleste deux fois plus de pôles que dans le premier.

Lorsqu'on tient compte du mouvement du Soleil, il est clair qu'en tous les points situés le long d'un petit cercle quelconque ayant pour pôles l'apex et l'antiapex, il doit y avoir le même nombre de pôles d'orbites; et si nous divisons la sphère céleste en deux hémisphères par un plan perpendiculaire à la direction du mouvement du Soleil, la disposition des pôles des orbites est la même dans les deux hémisphères.

62. — Supposons d'abord le Soleil immobile dans l'espace. Dans ce cas la disposition des pôles est évidente, absolument rien ne distingue deux points de la sphère céleste l'un de l'autre; donc, si nous considérons un élément $d\sigma$ de cette sphère, le nombre des pôles situés dans cet élément, n'importe où il soit placé, est

$$C d\sigma \quad (225)$$

C étant une constante.

Un grand nombre de points étant répartis uniformément sur la surface d'une sphère, dressons un tableau de leurs latitudes λ rapportées à un grand cercle choisi arbitrairement. Quelle sera la distribution de ces latitudes? Il est clair que le nombre des valeurs qui tombent entre λ_1 et λ_2 varie proportionnellement à l'aire de la zone comprise entre les deux petits cercles de latitude λ_1 et λ_2 , donc à $\sin \lambda_2 - \sin \lambda_1$. Divisons par exemple les latitudes en cinq groupes de 20° dans chaque hémisphère, nous aurons le tableau suivant :

ANGLES	SINUS	DIFFÉRENCES
100°	1,0000	
80	0,9511	0,0489
60	0,8090	0,1421
40	0,5878	0,2212
20	0,3090	0,2788
0	0,0000	0,3090
		<hr/>
		1,0000

On voit que le nombre des latitudes n'est pas le même pour chacun des intervalles de 20°.

Cherchons quelle doit être la moyenne des latitudes de tous les points situés dans un hémisphère. Pour cela, divisons cet hémisphère en une série de zones par des petits cercles de latitude infiniment voisins, soit n le nombre des points dans la zone de latitude λ , la moyenne de toutes les latitudes de l'hémisphère est :

$$\frac{\sum n\lambda}{\sum n}$$

le nombre n qui varie comme l'aire de la zone comprise entre les petits cercles λ et $\lambda + d\lambda$ peut être représenté par $C \cos \lambda d\lambda$, par conséquent la moyenne cherchée est

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} C \lambda \cos \lambda d\lambda}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} C \cos \lambda d\lambda} = \frac{[\lambda \sin \lambda + \cos \lambda]_0^{\frac{\pi}{2}}}{[\sin \lambda]_0^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad (226)$$

Donc la moyenne des latitudes d'un grand nombre de points

répartis uniformément sur un hémisphère est le complément de l'arc égal au rayon, ou

$$100^\circ - \frac{200^\circ}{\pi} = 36^\circ,338$$

Considérons maintenant une série de plans répartis uniformément dans l'espace, il est clair que les pôles seront répartis uniformément sur la sphère céleste. Les inclinaisons de ces plans sur un plan fixe, comptées de 0 à 100°, sont les compléments des latitudes de leurs pôles. D'après ce que nous venons de dire, le nombre des inclinaisons comprises entre ι_1 — ι_2 varie donc comme $\cos \iota_1 - \cos \iota_2$, et si nous formons cinq groupes de 20° nous avons le tableau suivant :

ANGLES	COSINUS	DIFFÉRENCES
0°	1,0000	
20	0,9511	0,0489
40	0,8090	0,1421
60	0,5878	0,2212
80	0,3090	0,2788
100	0,0000	0,3090
		<hr/>
		1,0000

On voit que les faibles inclinaisons doivent être plus rares que les fortes ; ce qui est très naturel, car une inclinaison nulle ne définit qu'un seul plan, tandis qu'une inclinaison de 100° en définit un grand nombre.

La moyenne des inclinaisons est le complément de la moyenne des latitudes des pôles, elle est donc égale à l'arc égal au rayon ou 63°,662.

63. — Maintenant tenons compte du mouvement du Soleil. Dans ce cas, la loi de distribution des pôles des orbites se déduit de celle des directions asymptotiques descendantes.

En effet, considérons les comètes qui nous viennent d'un point quelconque C de l'espace, le plan de chaque orbite passe par la droite qui va du Soleil au point C et par la vitesse relative de la comète ; pour les comètes visibles, ce plan peut avoir, avec une égale probabilité, une direction quelconque autour de la droite qui va du Soleil au point C. Cela est à peu près évident à cause de l'extrême minceur de l'hyperboloïde, et si la chose ne paraît pas évidente à priori elle résulte de ce que nous avons montré n° 44 que les vitesses relatives des comètes visibles sont distribuées uniformément sur toutes les directions entre l'axe de l'hyperboloïde et sa surface. La droite qui va du Soleil au point C est la direction de l'asymptote descendante de l'orbite, à cause de la grande distance du point C au Soleil.

Cela posé, supposons que par la méthode du n° 58 nous ayons trouvé la loi du nombre des directions asymptotiques descendantes qui se trouvent dans un élément de surface de la sphère céleste, cette loi est donnée par la formule 218, qui, après que l'intégration a été effectuée, est de la forme

$$d\sigma \propto F(\alpha) \quad (227)$$

$d\sigma$ étant un élément quelconque de la sphère céleste, α la distance angulaire de cet élément à l'apex du Soleil et $F(\alpha)$ une certaine fonction de α déterminée par la formule 218.

Pour avoir la loi de distribution des plans des orbites, il faut diviser la sphère céleste en éléments infiniment petits et par le rayon qui passe par chacun d'eux mener une série de plans en nombres donnés par la formule 227, également espacés les uns des autres en distance angulaire. Ou bien pour avoir la disposition des pôles des orbites, il faut imaginer que chacun des éléments de la sphère céleste est le pôle d'un grand cercle et marquer sur ces grands cercles des points également espacés en nombres égaux à deux fois (1) la formule 227.

(1) Deux fois, si l'on considère les deux pôles de chaque orbite ; une seule fois, si l'on n'en considère qu'un. Rappelons aussi que la disposition des pôles étant symétrique par rapport au centre de la sphère (n° 64), il suffit de l'étudier dans l'hémisphère de l'apex du Soleil, dans l'hémisphère de l'antiapex elle sera la même.

Il s'agit de trouver la formule qui exprime la loi ainsi obtenue. Soit I (fig. 15), l'apex du Soleil sur la sphère céleste, il est clair que le

nombre des pôles qui se trouvent dans un élément de cette sphère ne dépend que de la distance angulaire de cet élément à l'apex du Soleil.

Considérons la zone limitée par un petit cercle B situé à une distance β du point I et un petit cercle infiniment voisin dont la distance à I est $\beta + d\beta$, cherchons le nombre des pôles qui se trouvent dans cette zone. Pour cela divisons la sphère céleste en une série d'éléments $d\sigma$ par des petits cercles infiniment voisins ayant pour pôles l'apex et l'antiapex du Soleil, et des méridiens infiniment voisins passant par l'apex et l'antiapex. Soit en M l'un des éléments $d\sigma$ ainsi obtenus, α sa distance angulaire au point I, cherchons quel est le nombre des pôles envoyés par cet élément dans la zone BB'.

L'élément M est le pôle d'un grand cercle dont SP représente la section par le plan de

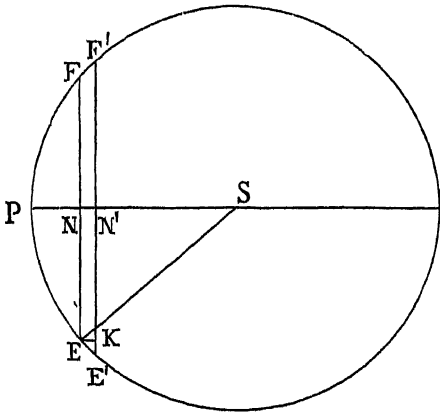
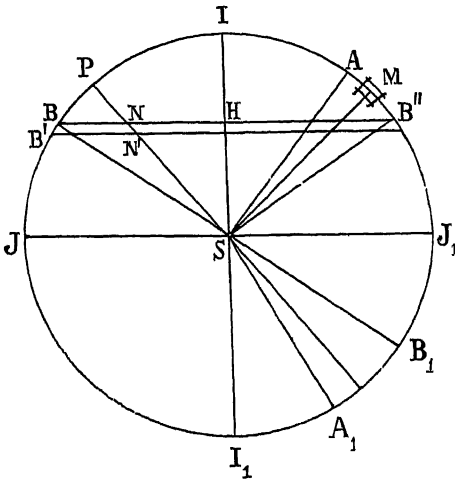


Fig. 15

la figure et qui est représenté dans son plan au-dessous. Le plan du petit cercle B coupe le plan de ce grand cercle suivant une droite EF, le plan du petit cercle B' le coupe suivant une droite E'F' infiniment voisine de EF, l'arc de ce grand cercle qui se trouve dans la zone BB' est EE' + FF' ou 2EE'. Le nombre total des pôles

d'orbites qui proviennent de l'élément M de la sphère céleste est égal à deux fois la formule 227, ces pôles sont uniformément répartis tout le long du grand cercle qui a M pour pôle, en prenant pour unité de longueur le rayon de la sphère céleste la longueur de ce grand cercle est 2π , le nombre des pôles que l'élément M envoie dans la zone BB' est donc :

$$\frac{4EE'}{2\pi} \times d\sigma F(\alpha) \quad (228)$$

Evaluons la longueur EE' en fonction de α , β , $d\beta$ Posons $SN = m$, $NN' = dm$, et par E menons EK parallèle à SN, les triangles semblables EE'K, SEN nous donnent

$$EE' = \frac{-dm}{\sqrt{1-m^2}} \quad (229)$$

Je mets le signe — devant dm parce que dm est négatif pour $d\beta$ positif. On arrive aussi à la formule 229 en remarquant que $\text{arc PE} = \text{arc cos } m$ et prenant la différentielle. La figure nous donne ensuite :

$$SH = SB \cos \beta = SN \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

comme $SB = 1$, $SN = m$ il en résulte

$$m = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$$

et en différentiant par rapport à β seul

$$dm = -\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} d\beta$$

la valeur 229 de EE' devient alors

$$EE' = \frac{\sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \alpha} \cos^2 \beta} d\beta \quad (230)$$

En portant cette valeur dans la formule 228, on trouve que le

nombre des pôles d'orbites envoyés par l'élément M dans la zone BB' est

$$\frac{2 \sin \beta}{\pi \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}} d\beta \times d\sigma \times F(\alpha) \quad (231)$$

Il faut maintenant étendre cette formule à tous les éléments M qui envoient des pôles dans la zone BB', étendons la d'abord à la zone comprise entre deux petits cercles distants du point I de α et $\alpha + d\alpha$, tous les éléments de cette zone se trouvant dans les mêmes conditions, il suffit de remplacer $d\sigma$ par son aire, qui, en prenant pour unité de surface la surface totale de la sphère, est

$$\frac{1}{2} \sin \alpha d\alpha$$

et la formule précédente devient

$$\frac{\sin \beta \sin \alpha}{\pi \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}} d\beta \times F(\alpha) d\alpha \quad (232)$$

Il faut ensuite étendre cette formule 232 à toutes les zones comprises entre deux petits cercles infiniment voisins qui envoient des pôles dans la zone BB'. Menons dans le plan de la figure le diamètre BB₁, la perpendiculaire SA à ce diamètre, et le diamètre JJ₁ perpendiculaire à SI. Si le point P se trouve entre J et B, le grand cercle qui a M pour pôle ne rencontre pas la zone BB'; si nous déplaçons P le long du demi-cercle JIJ₁ de J en J₁, le point M se déplace en même temps sur le demi-cercle IJ₁I₁ depuis le point I jusqu'au point I₁, c'est-à-dire depuis l'apex jusqu'à l'antiapex du Soleil; le grand cercle qui a M pour pôle rencontre la zone BB' tant que le point P se trouve entre B et B'' symétrique de B par rapport à SI. Lorsque le point P va de B en B'', le point M va du point A pour lequel $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ au point A₁ pour lequel $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$; il en résulte que la formule 232 doit être intégrée entre ces limites, ce qui nous donne :

$$\frac{1}{\pi} \sin \beta \, d\beta \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \frac{F(\alpha) \sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}} \, d\alpha \quad (233)$$

Cette formule représente le nombre des pôles situés dans la zone BB' comprise entre les petits cercles dont la distance à I est β et $\beta + d\beta$; comme l'aire de cette zone est $\frac{1}{2} \sin \beta \, d\beta$ et que tous les éléments dont elle se compose sont dans les mêmes conditions, pour avoir le nombre des pôles dans un élément $d\sigma$ de la sphère céleste situé à la distance β de l'apex du Soleil, il faut multiplier la formule précédente par $\frac{d\sigma}{\frac{1}{2} \sin \beta \, d\beta}$ ce qui nous donne finalement :

$$\frac{2d\sigma}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \frac{F(\alpha) \sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}} \, d\alpha \quad (234)$$

Cette formule donne le nombre des pôles des orbites qui se trouvent dans un élément $d\sigma$ de la sphère céleste situé à la distance angulaire β de l'apex du Soleil; elle convient au cas $\beta < \frac{\pi}{2}$, mais si β dépasse $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si l'élément $d\sigma$ se trouve dans l'hémisphère de l'antiapex, il suffit de le remplacer par l'élément symétrique par rapport au centre de la sphère céleste, ces deux éléments renferment le même nombre de pôles.

La fonction $F(\alpha)$ n'est autre que la formule 218 abstraction faite du facteur $d\sigma$, c'est la fonction qui représente la loi de distribution des directions asymptotiques descendantes. Dans la formule 234 la variable α disparaît après l'intégration. Enfin remarquons que le facteur 2 doit être supprimé si au lieu des deux pôles de chaque orbite on n'en considère qu'un seul, par exemple le pôle positif.

Il résulte de la formule 234 que la loi de distribution des pôles des orbites est liée d'une façon assez compliquée à la fonction $\varphi(h)$ qui donne la loi des vitesses des corps répandus dans l'espace; nous pourrions examiner ici les cas $\varphi(h) = \text{constante}$ et $\varphi(h) = Mh^2$ considérés précédemment, mais ce serait peu utile et nous nous en dispenserons.

64. — Nous allons seulement donner deux vérifications de la formule 234. La première consiste à montrer que dans le cas où le Soleil est immobile dans l'espace, nous trouvons bien la loi indiquée n° 62 d'après laquelle les pôles sont uniformément répandus sur la sphère céleste. Dans ce cas $F(\alpha)$ est une constante que nous désignerons par C_1 , la formule 234 devient donc

$$\frac{2C_1 d\sigma}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}} d\alpha = 2C_1 d\sigma \quad (235)$$

c'est-à-dire que les pôles sont uniformément répartis sur la sphère et en chaque point leur nombre est double de celui des directions asymptotiques descendantes; il fallait s'attendre à trouver ce facteur 2, parce que nous marquons sur la sphère céleste les deux pôles de chaque orbite.

Comme seconde vérification, remarquons que les pôles situés à l'apex et à l'antiapex du Soleil proviennent tous des comètes dont les asymptotes descendantes ont une direction perpendiculaire à la vitesse du Soleil; comme le long du grand cercle qui a l'apex pour pôle il y a en tous les points le même nombre de directions asymptotiques descendantes, on comprend à priori que le nombre des pôles à l'apex, et aussi à l'antiapex, doit être double de celui des asymptotes descendantes dans les directions perpendiculaires au mouvement solaire. La formule 234 va en effet nous conduire à ce résultat. Pour avoir le nombre des pôles à l'apex du Soleil, il faut faire $\beta = 0$, mais dans ce cas les limites de l'intégration devien-

nent égales et la quantité sous le signe \int infinie ; donnons donc à β une valeur très petite ε que nous ferons ensuite tendre vers zéro, alors α ne varie plus qu'entre les limites infiniment rapprochées $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $F(\alpha)$ ne subissant pas de brusque variation on peut considérer cette quantité comme égale à $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et la retirer du signe \int , la formule 234 devient

$$\frac{2d\sigma}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}} d\alpha \quad (236)$$

L'intégrale renfermée dans cette formule est la même que celle de la formule 235, sa valeur est π quel que soit ε , par conséquent lorsque ε tend vers zéro la limite est π et le nombre des pôles à l'apex du Soleil est

$$2d\sigma F\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (237)$$

ce qui est bien le double du nombre des directions asymptotiques descendantes dans les directions $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire à 100° de l'apex du Soleil.

CHAPITRE IV

DISPOSITION DES ÉLÉMENTS DES ORBITES TELLE QU'ELLE RÉSULTE DE L'OBSERVATION

65. — Dans le chapitre précédent nous avons trouvé quelle devrait être la disposition des divers éléments des orbites des comètes, dans le cas où ces astres viendraient des espaces interstellaires ; il serait très intéressant de comparer cette disposition théorique avec la disposition réelle, mais cette comparaison présente des difficultés. En effet nos formules donnent la disposition théorique des éléments de la totalité des comètes dont la distance périhélie est inférieure à une limite donnée, or l'observation ne nous fait pas connaître toutes ces comètes, mais seulement une fraction de leur nombre total, et une fraction variable selon les éléments parce que la probabilité de la découverte d'une comète dépend de la situation de son orbite. Pour pouvoir comparer la disposition théorique des orbites à leur disposition réelle, il faudrait donc connaître pour chaque valeur des éléments la probabilité de la découverte, cette probabilité n'est pas connue, sa recherche présenterait des difficultés sérieuses et exigerait des données qui ne peuvent être obtenues que par l'observation des circonstances de visibilité d'un grand nombre de comètes.

Aussi l'étude complète de la probabilité de la découverte d'une comète selon les éléments de son orbite n'a pas été entreprise. Toutefois M. Holetschek a écrit un mémoire ⁽¹⁾ qui se rattache à cette question, car il a pour but de faire connaître quelles conditions doit remplir l'orbite pour que la comète ne puisse pas être aperçue par nous, restant plongée dans les rayons du Soleil tant que son

(1) Ueber die Bahn eines Kometen, der während seiner günstigen Helligkeit nicht aus den Sonnenstrahlen heraustreten kann ; *Comptes-rendus de l'Académie de Vienne*, tome LXXXVIII, année 1883.

éclat serait suffisant pour que nous puissions la découvrir. Le *Bulletin astronomique* (t. II, p. 344) ayant donné un court résumé de ce mémoire, je me contente de le mentionner.

On trouve dans la correspondance entre Olbers et Bessel (t. I, p. 35) et dans les *Astronomische Nachrichten* (note de M. Harzer, t. 103, p. 65) des études sur la probabilité de la découverte des comètes, mais il s'agit seulement de la probabilité de voir une comète dans une lunette dirigée vers un point donné du ciel, question qui ne se rattache pas directement au sujet que je traite ici

Quoique nous ne puissions pas faire une comparaison complète entre les formules du chapitre III et la réalité, il est intéressant de rendre compte des principaux travaux qui ont été publiés sur la statistique des comètes connues. D'ailleurs quelques astronomes ayant cru reconnaître une relation entre la disposition des orbites et la direction du mouvement du Soleil dans l'espace, il faut montrer qu'une telle relation n'existe pas, afin de réfuter ceux qui voudraient en faire une objection contre la théorie qui rattache les comètes au Système solaire.

La statistique des comètes et les questions qui s'y rattachent ont donné lieu à un grand nombre de travaux plus ou moins importants ; pour ne pas donner des résultats basés tantôt sur un catalogue tantôt sur un autre, j'ai pris le parti de me servir d'un catalogue unique, qui diffère peu d'ailleurs de celui de M. Holetschek.

Le catalogue de comètes dont je fais usage renferme en effet les comètes de l'inventaire donné par cet astronome dans son mémoire « *Ueber den scheinbaren Zusammenhang der heliocentrischen Perihellänge mit der Perihelzeit der Kometen* » Comptes-rendus de l'Académie de Vienne, t. xcix, année 1890 ; j'ai seulement supprimé les sept comètes des années —136, —68, 240, 539, 565, 1351, 1362 comme ayant des orbites incertaines et j'ai ajouté les comètes récentes. Les éléments ont été tirés jusqu'à l'année 1884 de l'ouvrage « *Wunder des Himmels* » de Littrow (7^e édition publiée par M. Weiss), de 1885 à 1890 de l'*Annuaire du Bureau des longitudes*, et pour les comètes parues en 1891 et 1892 des *Astronomische Nachrichten*. Pour les époques des découvertes j'ai

consulté l'Annuaire du Bureau des longitudes, la Cométographie de Pingré, les anciennes Connaissances des temps, ou le *Reperitorium der Cometen-Astronomie de Carl*.

Le catalogue que j'ai ainsi formé renferme 324 comètes dont la première est celle de l'année 568 de l'ère chrétienne et la dernière celle découverte par M. Denning le 18 mars 1892 ; naturellement je n'ai fait entrer chaque comète périodique qu'une seule fois, à sa première apparition certaine.

Nombre des comètes selon les saisons.

66.— Il y a longtemps, plusieurs astronomes ont remarqué que parmi les comètes connues de leur temps les époques des passages au périhélie sont plus nombreuses en hiver qu'en été. Ainsi, dans un mémoire *Sur la distribution des orbites cométaires dans l'espace* ⁽¹⁾, M. Augustin Cournot étudiant les orbites de 125 comètes, trouve 71 passages au périhélie en hiver (du 22 septembre au 22 mars) et 54 seulement en été (du 22 mars au 22 septembre). La même remarque avait été faite antérieurement par Lambert et par Arago. En étudiant le mémoire *Ueber die Richtungen der grossen Axen der Kometenbahnen* ⁽²⁾ de M. Holetschek, je remarquai que les statistiques récentes ne s'accordent pas avec le fait avancé autrefois que les comètes sont plus nombreuses en hiver. On y trouve en effet (pages 21 et 26) des tableaux au bas desquels sont les nombres des comètes qui ont passé au périhélie dans chaque mois, si l'on fait la somme de ces nombres d'abord pour les mois d'été (avril-septembre) puis pour les mois d'hiver (octobre-mars), on trouve que parmi les 300 comètes du catalogue de M. Holetschek juste 150 ont passé au périhélie en été et 150 aussi en hiver. Ne pouvant mettre en doute ni les résultats des anciens astronomes, ni

(1) Ce mémoire est imprimé à la suite de la traduction française de l'*Astronomie de John Herschel*, édition de 1834.

(2) *Comptes-rendus de l'Académie de Vienne*, tome xiv, année 1886.

ceux indiqués par les statistiques modernes, je pensai que puisque les anciennes comètes sont plus nombreuses en hiver et que parmi la totalité des comètes connues aujourd'hui il y en a le même nombre dans les deux saisons, les comètes récentes doivent être plus nombreuses en été. C'est en effet, comme on va le voir, ce que montre la statistique.

Pour vérifier cela, j'ai divisé les 324 comètes de mon catalogue en quatre groupes renfermant chacun 81 comètes, le premier qui commence à l'année 568 se termine à 1769, le second s'étend de 1770 à 1840, le troisième se termine au mois de mai 1867, et le quatrième en mars 1892. J'ai compté ensuite pour chaque groupe le nombre des comètes qui ont passé au périhélie dans chaque mois (1), toutes les dates sans exception ont été rapportées au calendrier grégorien, le seul qui soit d'accord avec les saisons. Voici le résultat de cet inventaire :

STATISTIQUE DES ÉPOQUES DES PASSAGES AU PÉRIHÉLIE

	I	II	III	IV	TOTAL
Janvier.	9	8	7	5	29
Février.	8	5	6	4	23
Mars	6	5	5	5	21
Avril.....	5	10	4	6	25
Mai.....	5	6	8	4	23
Juin.....	9	2	11	12	34
Juillet... ..	4	7	4	9	24
Août	4	4	6	7	21
Septembre .. .	7	11	8	10	36
Octobre	9	3	9	5	26
Novembre... ..	9	12	4	12	37
Décembre.....	6	8	9	5	28
Avril — Septembre..	34	40	41	48	163
Octobre — Mars... .	17	41	40	33	161

(1) Si l'on veut corriger ces nombres de l'inégalité des mois, il suffit de multiplier ceux qui se rapportent à des mois de 31 jours par $\frac{30}{31}$ et ceux du mois de février par $\frac{30}{28,25}$.

On voit que dans le premier groupe les passages au périhélie sont plus nombreux en hiver qu'en été, dans le dernier au contraire c'est en été qu'ils sont plus nombreux.

Avant d'aller plus loin, remarquons que ces inégalités ne peuvent être attribuées qu'aux saisons terrestres (1) qui influent sur les époques des passages au périhélie parce que généralement on découvre les comètes dans le voisinage du périhélie, il est donc plus naturel de faire la statistique précédente sur les époques des découvertes, c'est ce que j'ai fait dans le tableau suivant ; les dates ont encore été rapportées toutes au calendrier grégorien.

STATISTIQUE DES ÉPOQUES DES DÉCOUVERTES DES COMÈTES

	I	II	III	IV	TOTAL
Janvier.....	9	11	3	5	28
Février	9	2	7	5	23
Mars.....	7	11	2	6	26
Avril.....	5	6	11	9	31
Mai... ..	7	3	7	4	21
Juin.....	2	5	9	4	20
Juillet... ..	8	8	10	10	36
Août.....	8	9	6	8	31
Septembre.....	8	4	5	9	26
Octobre	8	6	6	6	26
Novembre	6	7	7	8	28
Décembre	4	9	8	7	28
Avril — Septembre.	38	35	48	44	165
Octobre — Mars	43	46	33	37	159

On voit que jusqu'à la fin du second groupe, c'est-à-dire jusqu'à l'année 1840, sur 162 comètes 73 ont été découvertes pendant la saison d'été (avril-septembre) et 89 pendant la saison d'hiver (octo-

(1) La plupart des observatoires étant situés dans l'hémisphère boréal.

bre-mars); au contraire depuis cette époque sur 162 comètes 92 ont été découvertes en été et 70 seulement en hiver. Remarquons qu'à partir de 1840, époque où les découvertes sont devenues plus nombreuses en été, la recherche des comètes a été poussée avec beaucoup plus d'activité qu'auparavant; on trouve en effet dans notre catalogue 48 comètes découvertes pendant les quarante années 1801-1840, tandis que pendant les quarante années suivantes 1841-1880 on en trouve 115, nombre beaucoup plus considérable.

En résumé, tant qu'on a cherché les comètes à l'œil nu ou avec des instruments peu puissants, on en a découvert plus pendant la saison d'hiver que pendant la saison d'été; depuis que les recherches se font très assidûment et avec des instruments puissants, on en découvre plus pendant la saison d'été que pendant la saison d'hiver.

Cette différence entre les époques éloignées et les époques récentes s'explique facilement. Tant qu'on observait à l'œil nu ou avec de petits instruments permettant d'explorer rapidement le ciel, le fait qu'en hiver une plus grande partie de la sphère céleste nous est accessible à cause de la grande longueur des nuits, explique la prépondérance des découvertes dans cette saison. Mais depuis qu'on a commencé à se servir de chercheurs puissants la recherche des comètes en hiver a rencontré des difficultés, parce qu'avec ces instruments il faut plusieurs nuits pour explorer tout le ciel. Il en résulte que pendant l'hiver l'influence des fréquents jours de mauvais temps est plus grande, que la recherche assidue des comètes est plus pénible, que la buée qui pendant la nuit se dépose sur les verres est plus gênante si l'on se sert d'un chercheur puissant que si l'on observe à l'œil nu ou avec un instrument de petites dimensions. Ces difficultés pratiques qui se rencontrent principalement en hiver pour les chercheurs puissants doivent compenser et au delà l'effet inverse de la longueur des nuits, et causer cette prépondérance des découvertes en été que nous constatons dans les temps récents.

*Relation entre la longitude du périhélie et l'époque
du passage.*

67.— Cette relation a été découverte par M. Holetschek, qui a démontré son existence dans deux mémoires ⁽¹⁾ : « *Ueber die Richtungen der grossen Axen der Kometenbahnen* » et « *Ueber den scheinbaren Zusammenhang der heliocentrischen Perihellänge mit der Perihelzeit der Kometen.* »

Les comètes que nous avons le plus de chance de découvrir sont celles qui à l'époque du passage au périhélie se trouvent dans le voisinage de la Terre, c'est-à-dire près de la ligne de jonction de la Terre et du Soleil. Si nous désignons par l la longitude héliocentrique ⁽²⁾ du périhélie, par L la longitude géocentrique du Soleil à l'époque du passage au périhélie, les comètes que nous avons le plus de chance de découvrir sont donc celles qui remplissent à peu près la condition

$$l = L \pm 200^\circ \quad (238)$$

Toutefois pour les comètes à distances périhéliques très petites les circonstances sont différentes, ces comètes ne peuvent être vues que lorsque l'anomalie vraie est assez grande, si le périhélie se trouve entre la Terre et le Soleil elles passent derrière le Soleil après avoir passé au périhélie et ne peuvent pas être découvertes. Donc pour les comètes à très petites distances périhéliques la relation qui favorise les découvertes est

$$l = L \quad (239)$$

(1) *Comptes-rendus de l'Académie de Vienne*, tome XCIV, année 1886, et tome XCIX, année 1890.

(2) l désigne la véritable longitude héliocentrique, qui, surtout lorsque l'inclinaison est grande, diffère de la longitude du périhélie comptée dans l'orbite.

Les comètes qui ont été observées vérifient en effet ces relations. En adoptant $q = 0,3$ pour la limite des petites distances périhélies, nous trouvons parmi les 324 comètes de notre catalogue 286 distances périhélies supérieures à 0,3 et 38 inférieures ; le tableau suivant donne le nombre des valeurs de $l - L \pm 200^\circ$ et $l - L$, selon que $q > 0,3$ ou $q < 0,3$, qui tombent dans chaque intervalle de 25° . Les valeurs ⁽¹⁾ sont prises abstraction faite du signe, qui est assez indifféremment + et —, car parmi les 286 comètes avec $q > 0,3$ on trouve pour $l - L \pm 200^\circ$ 138 valeurs positives et 148 négatives et parmi les 38 comètes avec $q < 0,3$ on trouve pour $l - L$ 20 valeurs positives et 18 négatives.

	$l - L \pm 200^\circ$	$l - L$
0 à 25°	85	8
25 50	48	6
50 75	43	11
75 100	37	2
100 125	20	4
125 150	20	1
150 175	19	2
175 200	14	4
	<hr/> 286	<hr/> 38

On voit qu'à mesure qu'on s'écarte des relations 238 et 239 le nombre des comètes diminue, l'opinion que ces relations favorisent les chances de découverte est donc confirmée. Il semble seulement que pour les petites distances périhélies une valeur de $l - L$ voisine de 60° est un peu plus favorable qu'une valeur tout à fait nulle.

Il résulte de ces relations que si l'on extrait du catalogue les comètes qui ont passé au périhélie pendant un certain mois, sans avoir égard à l'année, les périhélies de ces comètes ne sont pas

(1) Nous comptons ces angles de -200° à $+200^\circ$, de façon qu'ils soient toujours inférieurs à 200° en valeur absolue.

distribués uniformément autour du Soleil, mais présentent une forte accumulation du côté où se trouve la Terre pendant le mois considéré.

68.— Pour les comètes qui se meuvent dans l'écliptique on peut se rendre très bien compte du fait que les relations 238 et 239 favorisent les découvertes, par le tracé graphique des trajectoires de ces astres, comme nous allons l'expliquer.

Soit P (fig. 16) le périhélie d'une comète dont l'orbite se trouve dans l'écliptique, S le Soleil, C et T les positions occupées par la comète et par la Terre à l'instant considéré; r et Δ les distances de

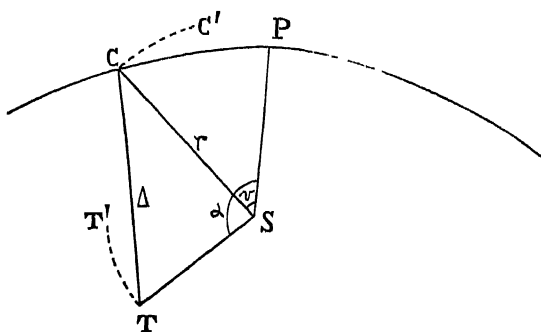


Fig. 16

la comète au Soleil et à la Terre, v son anomalie vraie PSC et α l'angle PST, nous compterons les angles positivement dans le sens direct. En désignant par t le temps écoulé depuis l'instant du passage de la comète au périhélie nous avons (1) :

$$\left. \begin{aligned} \pm \frac{\sqrt{f_{\mu}}}{q\sqrt{2q}} t &= \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \\ r &= \frac{2q}{1 + \cos v} \end{aligned} \right\} \quad (240)$$

(1) Voir le *Traité de Mécanique céleste* de M. TISSERAND, tome I, p. 110 et 111.

Dans la première équation, l'angle v étant compté positivement dans le sens direct, le signe $+$ correspond aux comètes directes et le signe $-$ aux rétrogrades. Soit α_0 la valeur de l'angle α à l'instant du passage de la comète au périhélie, n le moyen mouvement de la Terre dans l'unité de temps, en négligeant l'excentricité de l'orbite terrestre nous avons

$$\alpha = \alpha_0 + nt \quad (241)$$

Faisons tourner la figure autour du point S de l'angle $-nt$, la Terre vient au point T' qu'elle occupait à l'instant du passage de la comète au périhélie, la comète vient en un certain point C'. Cette rotation n'altère ni les distances de la comète à la Terre et au Soleil, ni la distance angulaire apparente de la comète au Soleil, de sorte que si nous supposons la Terre en T et la comète en C ou la Terre en T' et la comète en C' les conditions de visibilité sont les mêmes. Au lieu de considérer à la fois le mouvement de la Terre et celui de la comète, nous pouvons donc considérer la Terre comme fixe au point T' où elle se trouve à l'instant du passage au périhélie et la comète comme décrivant la courbe que décrit le point C' lorsqu'à chaque instant on donne à la figure la rotation $-nt$. En désignant par r et ω les coordonnées polaires d'un point quelconque de cette courbe relativement à l'axe SP, nous avons d'après les équations 240 :

$$\left. \begin{aligned} \omega &= v - nt \\ r &= \frac{2q}{1 + \cos v} \\ \pm \frac{\sqrt{f\mu}}{q\sqrt{2q}} t &= \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \end{aligned} \right\} \quad (242)$$

La courbe que décrit le point C' peut être appelée « trajectoire apparente » de la comète, elle représente le mouvement apparent de cet astre relativement au Soleil. Il est commode d'exprimer r et ω en fonction de la variable auxiliaire $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$ que pour abrégé nous désignerons par m , les équations 242 donnent :

$$\left. \begin{aligned} r &= q(1 + m^2) \\ \omega &= 2 \operatorname{arctg} m \mp \frac{nq\sqrt{2q}}{\sqrt{f\mu}} \left(m + \frac{1}{3} m^3\right) \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

Dans le double signe de ces diverses formules, il faut prendre le signe supérieur pour les comètes directes et le signe inférieur pour les rétrogrades.

En donnant à m une série de valeurs il est facile de calculer par les formules 243 les coordonnées r et ω d'une série de points de la trajectoire apparente, ce qui permet de la construire sur une feuille de papier ; en faisant cette opération pour quelques valeurs de q , on obtient une épure qui montre les circonstances de visibilité des comètes qui se meuvent dans l'écliptique. Pour trouver les valeurs de α_0 ($= L - l + 200^\circ$) qui favorisent les découvertes, on construit sur une feuille de papier à calquer l'épure des courbes d'égal éclat $r\Delta = \text{constante}$, en ajoutant deux droites issues de la Terre pour limiter les régions trop voisines du Soleil, où les comètes ne peuvent pas être aperçues ; comme sur l'épure des trajectoires apparentes la Terre est ramenée à un point fixe il suffit de superposer les deux épures pour se rendre compte de l'éclat qu'atteint une comète pour chaque valeur de α_0 .

On voit ainsi que d'une manière générale les relations 238 et 239 favorisent les découvertes, et on remarque même que pour les distances périhélie voisines de 0,2 les valeurs de α_0 qui donnent les plus grands éclats sont situées vers 100° pour les comètes directes et vers 180° pour les comètes rétrogrades, ce qui s'accorde bien avec le fait que les distances périhélie entre 0,0 et 0,3 donnent les valeurs de $l - L$ un peu plus nombreuses vers 60° que vers zéro.

En étudiant les trajectoires apparentes on remarque encore que ces courbes ont des formes essentiellement différentes selon que le mouvement est direct ou rétrograde et que d'une manière générale les comètes directes doivent mieux vérifier la relation 238 que les comètes rétrogrades ; la statistique des comètes connues

s'accorde en effet avec cette prévision. Le tableau suivant montre comment les valeurs de $l - L \pm 200^\circ$ se répartissent pour les comètes avec $q > 0,3$ et inclinaisons inférieures à 50° ou supérieures à 150° ; pour les inclinaisons inférieures à 50° la colonne A comprend toutes les comètes, dans la colonne B les comètes de révolutions inférieures à 100 ans ont été supprimées.

Valeurs de $l - L \pm 200^\circ$

		$i < 50^\circ$		
		A	B	$i > 150^\circ$
0°	à 50°	49	25	16
50	100	18	16	16
100	150	6	5	14
150	200	0	0	4

On voit que les comètes directes donnent très peu de valeurs au-delà de 100° , tandis que pour les rétrogrades c'est seulement au-delà de 150° que les valeurs de $l - L \pm 200^\circ$ deviennent rares. M. Holetschek avait remarqué que les comètes périodiques (à leur première apparition) satisfont mieux la relation 238 que les autres comètes ; il attribue ce fait à ce que les comètes périodiques revenant fréquemment au périhélie, si elles ont passé inaperçues dans plusieurs apparitions défavorables, finissent bien par arriver près de nous dans des circonstances très favorables et sont alors découvertes. D'après ce que je viens de dire, le fait que les comètes périodiques ont presque toutes un mouvement direct et des inclinaisons faibles doit aussi beaucoup contribuer à faire que ces comètes satisfont mieux la relation 238 que l'ensemble des autres.

Comme les comètes directes et rétrogrades se présentent à nous dans des conditions très différentes, on peut se demander si la probabilité des découvertes est la même pour ces deux espèces d'astres. L'épure des trajectoires apparentes montre que dans la

plupart des cas si deux comètes qui se meuvent dans l'écliptique parcourent la même orbite mais en sens inverse et passent au périhélie en même temps, la comète rétrograde devient plus brillante pour nous que la comète directe ; il en résulterait que si l'on observe le ciel d'une manière continue de façon à ne laisser passer aucune des comètes qui, lorsqu'elles ne sont pas trop près du Soleil, surpassent un certain éclat, on devrait découvrir plus de comètes rétrogrades que de comètes directes, au cas où les nombres de ces deux espèces d'astres seraient égaux ; et par conséquent on peut se demander si les nombres à peu près égaux d'orbites directes et rétrogrades connues n'indiquent pas qu'en réalité, même abstraction faite des comètes à courte période, il y a plus de comètes directes que de comètes rétrogrades. Je me contente de mentionner cette question dont l'étude exigerait de plus longs développements.

Disposition des longitudes des périhélies.

69. — Plusieurs astronomes avaient remarqué que les rayons vecteurs menés du Soleil aux périhélies des comètes ont une certaine tendance à se grouper suivant deux directions diamétralement opposées, 113° et 313° de longitude d'après Houzeau. Comme le Système solaire se meut vers un point dont la longitude (294° , n° 20) ne diffère pas beaucoup de 313° , on était porté à voir une liaison entre cette tendance manifestée par les grands axes des comètes et le mouvement du Système solaire. M. Holetschek dans son mémoire *Ueber die Richtungen der grossen Axen der Kometenbahnen* attribue simplement ce fait aux saisons terrestres.

On jugera de la tendance manifestée par les grands axes des orbites à se grouper suivant une certaine direction par l'inventaire suivant, qui donne le nombre des longitudes héliocentriques ⁽¹⁾ des

(1) Il s'agit toujours de la véritable longitude héliocentrique, et non de la longitude comptée dans l'orbite.

périhélie dans chacun des intervalles de la circonférence divisée en huit parties dont quatre ont les équinoxes et les solstices à leur centre.

VALEURS DES LONGITUDES HÉLIOCENTRIQUES DES PÉRIHÉLIES

25°	à	75°	37
75		125	61
125		175	28
175		225	28
225		275	35
275		325	58
325		375	37
375		25	40
			<hr/>
			324

Dans ce tableau chaque longitude est rapportée à l'équinoxe de l'année du passage au périhélie, en les rapportant à un équinoxe fixe on obtiendrait des nombres peu différents, car la précession ne serait un peu forte que pour les anciennes comètes qui sont peu nombreuses. On voit que près des longitudes 100° et 300° les périhélie sont plus nombreux qu'ailleurs. Mais remarquons tout de suite qu'il n'est pas possible d'attribuer ce fait au mouvement du Système solaire dans l'espace. En effet d'après ce que nous avons dit (nos 58-60) ce mouvement ne peut pas produire une double prépondérance des aphélie dans deux directions opposées, il produirait une prépondérance vers l'apex du Soleil et une diminution de leur nombre à l'antiapex, comme la longitude de l'antiapex est voisine de 100°, les aphélie devraient être rares vers cette longitude et par conséquent les périhélie rares vers 300°; or au contraire cette longitude est l'une des deux où la statistique les montre plus nombreux, il se trouve même que dans les statistiques citées dans le mémoire de M. Holetschek ils sont plus nombreux autour de 300° que partout ailleurs. On ne peut donc pas attribuer la prépon-

dérance des périhélie vers 100° et 300° au mouvement du Système solaire. Comme ces longitudes correspondent aux solstices, il est très naturel à priori de l'attribuer à l'influence des saisons terrestres sur les circonstances des découvertes.

C'est donc avec raison que M. Holetschek a adopté cette opinion. Pour expliquer comment les saisons terrestres peuvent produire une accumulation des périhélie vers les longitudes 100° et 300° , après avoir démontré la relation entre la longitude du périhélie et l'époque du passage (n° 67), époque qui est toujours assez voisine de celle de la découverte, cet astronome admet qu'on a découvert plus de comètes en été que dans les autres saisons, parce que les régions du ciel situées autour du Soleil étant alors très boréales s'enfoncent lentement sous l'horizon. Cela étant admis, puisque les longitudes voisines de 300° sont prépondérantes parmi les comètes découvertes en été et que dans cette saison on découvre plus de comètes que dans les autres, les périhélie voisins de 300° auront la prépondérance parmi toutes les comètes. Mais les comètes à petites distances périhélie découvertes en été contribueront à amasser les périhélie à la longitude 100° et d'autre part les comètes à distances périhélie supérieures à 1 doivent être plus facilement découvertes en hiver parce que dans cette saison on observe facilement les régions opposées au Soleil ; de sorte que finalement il y aura deux accumulations, l'une vers 300° l'autre vers 100° .

Cette explication me paraît un peu vague et pas entièrement satisfaisante, parce que la supposition qu'on a découvert plus de comètes en été que dans les autres saisons n'est guère justifiée, pour l'ensemble des comètes connues, par la statistique des époques des découvertes (n° 66). Voici, à mon avis, la véritable cause du fait en question :

Soit S le Soleil et T_1 la position de la Terre sur l'écliptique au solstice d'été (*fig.* 17), dans l'Europe centrale la nuit n'est à cette époque complète que vers minuit, de sorte que la région de l'espace observable est limitée par un plan qui coupe l'écliptique suivant la ligne HH' perpendiculaire à ST_1 et est incliné de 20° , il en résulte que dans cette saison de deux points de l'espace qui ont la même

latitude le plus accessible aux observations est toujours celui qui satisfait le mieux la relation 238. Soit maintenant T_2 la position de la Terre à l'équinoxe d'automne, ou celui de printemps, à ces époques au moment de la fin du crépuscule et du commencement de l'aurore

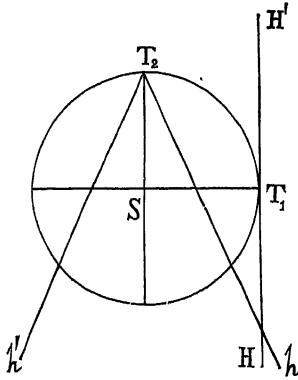


Fig. 17

l'intersection de l'écliptique et de l'horizon occupe des positions telles que T_2h , T_2h' et l'angle de ces deux plans est plus grand qu'en été (cet angle est surtout considérable le matin en automne et le soir au printemps), il en résulte qu'aux époques des équinoxes parmi les points de l'espace qui ont une même latitude ce n'est pas toujours celui qui satisfait le mieux la relation 238 qui est le plus accessible à nos observations, car ce point peut rester toute la nuit sous l'horizon.

En hiver, comme l'angle de l'horizon avec l'écliptique est moins fort que le matin en automne et le soir au printemps, on peut admettre que les conditions sont intermédiaires entre celles des équinoxes et celles du solstice d'été.

On comprend alors que c'est en été que la relation 238 doit être le mieux satisfaite, en automne et au printemps qu'elle doit l'être le moins. C'est en effet ce que montre la statistique ; j'ai divisé les 286 comètes pour lesquelles $q > 0,3$ en quatre groupes selon que les découvertes ont lieu dans les trois mois de février-mars-avril pour le premier groupe, mai-juin-juillet pour le second, août-septembre-octobre pour le troisième, novembre-décembre-janvier pour le dernier ; j'ai ensuite compté le nombre des valeurs de $l - L \pm 200^\circ$ (prises toujours en valeur absolue) qui se trouvent dans chacun des quatre intervalles de 50° compris entre 0 et 200° , voici les résultats obtenus :

	I	II	III	IV
	PRINTEMPS	ÉTÉ	AUTOMNE	HIVER
0° à 50°	27	41	29	36
50 100	26	17	20	17
100 150	7	6	18	9
150 200	8	8	8	9
	<hr/> 68	<hr/> 72	<hr/> 75	<hr/> 71

On voit qu'au printemps et en automne le nombre des valeurs comprises entre 0 et 50° est peu supérieur à celui des valeurs comprises entre 50 et 100, tandis qu'en été et en hiver la prépondérance du premier nombre sur le second est très considérable.

Puisque par suite de la situation différente de l'écliptique sur l'horizon la relation 238 est moins bien satisfaite vers les équinoxes que vers les solstices il doit se produire une accumulation des périhélieux aux longitudes 100° et 300°, quand même on découvre le même nombre de comètes en toute saison, parce que parmi les comètes découvertes en été et en hiver ces longitudes seront fort prépondérantes, tandis qu'elles seront à peine en minorité parmi celles découvertes au printemps et en automne.

Ainsi la prépondérance des longitudes des périhélieux vers les solstices, s'explique par les circonstances des saisons terrestres aux latitudes voisines de 50°, où la plupart des observatoires se trouvent.

Latitudes des périhélies.

70. — Les latitudes des périhélies de la totalité des comètes de notre catalogue se répartissent de la manière suivante :

LATITUDES		NOMBRE DE COMÈTES
+ 100° à + 80°		12
+ 80 + 60		25
+ 60 + 40		44
+ 40 + 20		45
+ 20 0		68
0 — 20		61
— 20 — 40		38
— 40 — 60		15
— 60 — 80		10
— 80 — 100		6
Total....		324

On voit que les divers intervalles de 20° renferment des nombres très inégaux de latitudes des périhélies, il fallait s'y attendre d'après ce qui a été dit au n° 62. Dans l'hémisphère nord nous trouvons 194 périhélies, dans l'hémisphère sud 130 seulement. Cherchons parmi 194 et 130 points répartis uniformément sur la surface d'un hémisphère combien il devrait y en avoir entre chaque intervalle de 20° pour les latitudes, cela se fait en multipliant les nombres donnés n° 62 par 194 et 130, le tableau suivant donne les résultats avec les résidus obtenus en retranchant les nombres théoriques des nombres observés :

		HÉMISPHERE NORD		HÉMISPHERE SUD	
LATITUDES		Résidus		Résidus	
0° à 20°		60	+ 8	40	+ 21
20 40		54	— 9	36	+ 2
40 60		43	+ 1	29	— 14
60 80		28	— 3	19	— 9
80 100		9	+ 3	6	0

Dans l'hémisphère nord les résidus sont alternativement de signes contraires et peuvent être attribués à des causes accidentelles ; dans l'hémisphère sud au contraire ils présentent une marche très prononcée, qui montre près de l'écliptique un plus grand nombre de périhélie que loin de ce plan. On met cela encore mieux en évidence en divisant la sphère en une série de zones de hauteurs égales, qui donc dans l'hypothèse d'une répartition uniforme devraient toutes renfermer le même nombre de latitudes des périhélie, prenons par exemple 0,25 pour hauteur de ces zones, nous obtenons le tableau suivant :

SINUS		ANGLE		Nombre des latitudes des périhélie	
				A	B
+ 1,00 à + 0,75		+ 100°,0 à + 54°,0		51	51
+ 0,75 + 0,50		+ 54,0 + 33,3		47	45
+ 0,50 + 0,25		+ 33,3 + 16,1		37	35
+ 0,25 0,00		+ 16,1 0,0		59	46
0,00 — 0,25		0,0 — 16,1		55	41
— 0,25 — 0,50		— 16,1 — 33,3		36	34
— 0,50 — 0,75		— 33,3 — 54,0		17	17
— 0,75 — 1,00		— 54,0 — 100,0		22	22
				324	291

Dans la colonne A de ce tableau les 324 comètes du catalogue sont prises en considération, dans la colonne B les comètes dont la révolution est inférieure à un siècle (1) ont été supprimées.

La rareté des périhélie près du pôle sud de l'écliptique est évidente. On remarque aussi que les périhélie des comètes périodiques sont presque tous près de l'écliptique, ce qui s'accorde avec le fait bien connu que ces comètes ont presque toujours des orbites peu inclinées

(1) Ces comètes sont au nombre de 33, voir *Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1892*, p. 278 et 280.

sur ce plan. Dans l'hémisphère nord et jusqu'aux latitudes australes peu élevées la distribution des latitudes des périhélies est à peu près uniforme, cependant lorsqu'on supprime les comètes périodiques on remarque une diminution assez régulière à mesure qu'on s'écarte du pôle nord de l'écliptique.

La rareté des périhélies dans les régions voisines du pôle sud tient évidemment à la position de la plupart des observatoires dans l'hémisphère nord, qui fait que les comètes qui au périhélie sont près de ce pôle ont moins de chances que les autres d'être découvertes. Si l'on était tenté d'y voir un effet du mouvement de translation du Système solaire, je ferais remarquer que d'après ce que nous avons dit dans le chapitre III, comme l'apex du Soleil a une forte latitude boréale les aphélies devraient être plus nombreux aux fortes latitudes boréales et par conséquent les périhélies aux fortes latitudes australes qu'ailleurs, ce qui est l'inverse de ce qui résulte des observations.

On obtient encore une statistique intéressante en groupant les comètes de distances périhélies comprises entre deux valeurs voisines, par exemple par intervalles de 0,2, et faisant la moyenne des latitudes des périhélies. Le tableau suivant donne le résultat de cette statistique, sous le signe + se trouvent les moyennes des latitudes boréales, sous le signe — celles des latitudes australes, comme les comètes dont la distance périhélie surpasse 1,6 sont peu nombreuses je les ai toutes groupées ensemble.

Distances périhélies	Moyenne des latit. des périhélies		Nombre des latit. des périhélies	
	+	—	+	—
0,0 à 0,2	30°,8	46°,4	10	14
0,2 0,4	40,0	35,4	22	17
0,4 0,6	39,3	32,9	28	13
0,6 0,8	44,7	16,7	38	22
0,8 1,0	27,8	31,7	39	25
1,0 1,2	32,9	18,8	22	14
1,2 1,4	28,2	15,4	12	8
1,4 1,6	28,7	17,0	10	7
> 1,6	32,7	17,9	13	10

On sait (n° 62) que la moyenne des latitudes d'une série des points répartis uniformément sur un hémisphère est $36^{\circ},338$.

On voit que pour les latitudes australes la moyenne des latitudes, qui est d'abord supérieure à celle qui correspond à une répartition uniforme, décroît à mesure que la distance périhélie augmente ; c'est que pour les distances périhélie très petites une forte latitude australe pour le périhélie ne constitue pas une mauvaise condition de visibilité, car lorsque la comète sort des rayons solaires elle se trouve dans l'hémisphère boréal. A mesure que la distance périhélie augmente une forte latitude australe pour le périhélie devient une condition de plus en plus mauvaise pour la visibilité. Dans l'hémisphère nord il semble que la moyenne des latitudes des périhélie passe par un maximum pour les distances comprises 0,6 et 0,8.

Il est difficile de dire à priori si d'une manière générale une faible latitude boréale du périhélie favorise ou non la visibilité. Comme les comètes qui a leur périhélie sont le plus près de la Terre ont une faible latitude, on pourrait être porté à croire qu'une faible latitude du périhélie favorise la visibilité, il en est certainement ainsi si en même temps que cette faible latitude se présente la relation 238 est satisfaite ; mais la condition d'une faible latitude du périhélie est aussi remplie par les comètes qui passent au périhélie derrière le Soleil, de sorte que cette condition favorise la visibilité d'une partie des comètes, mais elle favorise l'invisibilité des autres, de sorte que nous ne pouvons pas savoir si d'une manière générale elle favorise ou non la visibilité. Toutefois pour les grandes distances périhélie les comètes ne pouvant être aperçues que si les conditions les plus favorables se présentent, nous devons découvrir principalement des comètes avec faibles latitudes des périhélie ; M. Holetschek ⁽¹⁾ a fait remarquer que cela explique pourquoi lorsque la distance périhélie devient grande la moyenne des latitudes s'abaisse au-dessous de la valeur qui correspond à une répartition uniforme.

(1) Ueber die Vertheilung der Bahnelemente der Kometen, *Comptes-rendus de l'Académie de Vienne*, tome *xcviii*, année 1889.

Remarquons encore que les saisons terrestres ne sont pas sans influence sur la répartition des latitudes des périhélies. En été la partie du ciel située au-dessous de l'écliptique est beaucoup moins accessible à nos observations qu'en hiver, il en résulte que les latitudes australes doivent être plus fréquentes en hiver qu'en été. En effet sur 165 comètes découvertes pendant les six mois d'été (avril-septembre), on trouve 106 périhélies au nord de l'écliptique et 59 au sud ($\frac{106}{59} = 1,8$), et sur 159 comètes découvertes pendant les six mois d'hiver (octobre-mars) on trouve 88 périhélies au nord de l'écliptique et 71 au sud ($\frac{88}{71} = 1,2$).

Pour terminer ce qui a rapport à la distribution des périhélies des comètes sur la sphère céleste, ajoutons que M. Holetschek ⁽¹⁾ s'est demandé si les périhélies des comètes qui ont paru se mouvoir dans des hyperboles considérés seuls ne présentent pas quelque relation avec le mouvement du système solaire. Ces comètes sont au nombre de onze, mais le caractère hyperbolique de plusieurs d'entre elles est très incertain. Autant qu'on peut le juger par un aussi petit nombre de points, leurs périhélies paraissent distribués indifféremment dans les diverses régions du ciel et ne sont pas plus nombreux à l'antiapex du Soleil qu'ailleurs.

(1) Ueber die Vertheilung der Bahnelemente der Kometen, *Comptes-rendus de l'Académie de Vienne*, tome xoviii, année 1889.

Distances périhélies.

71. — Le tableau suivant donne le nombre des comètes dont les distances périhélies se trouvent dans chaque intervalle de 0,1.

0,0 à 0,1	15	} 24	1,4 à 1,5	9	} 17
0,1 à 0,2	9		1,5 à 1,6	8	
0,2 à 0,3	14	} 39	1,6 à 1,7	4	} 5
0,3 à 0,4	25		1,7 à 1,8	1	
0,4 à 0,5	14	} 41	1,8 à 1,9	4	} 8
0,5 à 0,6	27		1,9 à 2,0	4	
0,6 à 0,7	28	} 60	2,0 à 2,1	4	} 7
0,7 à 0,8	32		2,1 à 2,2	3	
0,8 à 0,9	28	} 64	2,2 à 2,3	1	} 1
0,9 à 1,0	36		2,3 à 2,4	0	
1,0 à 1,1	23	} 36	2,4 à 2,5	0	} 1
1,1 à 1,2	13		2,5 à 2,6	1	
1,2 à 1,3	11	} 20	> 2,6	1	
1,3 à 1,4	9				

On voit que le nombre des distances périhélies présente un maximum considérable vers $q=0,8$, il est difficile de décider si c'est une loi réelle ou seulement le résultat de ce que pour cette valeur les conditions de visibilité seraient plus favorables.

Considérant la région limitée par deux sphères de rayons 0,5 et 1,2 ayant le Soleil pour centre comme l'espace favorable aux observations des comètes, M. Schiaparelli a calculé pendant combien de temps les comètes avec diverses distances périhélies (entre 0,0 et 1,2) restent dans cette région et comparé les espaces de temps ainsi trouvés aux nombres des comètes qui ont ces diverses distances périhélies. Les nombres de comètes se sont trouvés à peu près proportionnels aux espaces de temps correspondants. D'autre part,

M. Holetschek (Ueber die Vertheilung.....) trouve que pour $q > 0,7$ le nombre des comètes qui ont une certaine distance périhélie varie à peu près proportionnellement à une quantité H qu'on peut appeler le plus grand éclat de ces comètes. H est l'éclat théorique $\left(\frac{1}{r^2 \Delta^2}\right)$ d'une comète qui se trouve au périhélie et dont le périhélie remplit les conditions suivantes : distance périhélie égale à la valeur donnée, latitude héliocentrique du périhélie voisine de la moyenne des latitudes des périhélies de toutes les comètes connues ayant la distance périhélie considérée, longitude héliocentrique du périhélie déterminée par la relation 238. Ces recherches autorisent à penser que les conditions de visibilité influent beaucoup sur la loi des distances périhélies, et que c'est bien là où elles sont le plus favorables que nous trouvons le plus grand nombre de ces distances.

M. Bredichin et M. Holetschek ont remarqué qu'en général les comètes périodiques ont des distances périhélies plus grandes que les autres ; en effet parmi les 33 comètes qui ont des révolutions inférieures à 100 ans, nous trouvons 14 valeurs inférieures à 1 et 19 valeurs supérieures, tandis que parmi les 324 comètes de notre catalogue, il y a seulement 96 valeurs de q supérieures à 1. La moyenne des distances périhélies est 1,105 pour les 33 comètes périodiques, pour les 324 comètes du catalogue cette moyenne est 0,844.

Il est encore à remarquer qu'aucune distance périhélie n'est inférieure au rayon du Soleil, ou en d'autres termes on n'a jamais vu une comète tomber sur cet astre ; d'après ce qui a été dit n° 57 si les comètes viennent des espaces interstellaires cela doit se produire de temps en temps. Mais on peut se demander si une comète qui tomberait sur le Soleil pourrait être découverte ; pour examiner cette question remarquons que le rayon du Soleil a pour valeur 0,00466, l'unité étant le rayon de l'orbite terrestre, les comètes dont la distance périhélie est entre 0 et 0,00466 se trouvent à peu de chose près dans les mêmes conditions que celles dont la distance

périhélie est entre 0,00466 et $0,00466 \times 2 = 0,00932$; or parmi les cinq comètes connues dont les distances périhéliees se trouvent entre ces deux dernières valeurs, deux (1680 et 1882) ont été découvertes avant le passage au périhélie. Si donc il existe des comètes qui tombent sur le Soleil, il doit être possible d'en apercevoir quelques-unes avant qu'elles atteignent cet astre; et si dans l'avenir on découvre encore des comètes de distances périhéliees peu supérieures au rayon du Soleil et jamais inférieures, ce sera une raison en faveur de l'opinion que les comètes ne viennent pas des espaces interstellaires.

Longitudes des nœuds.

72. — Il y a peu de chose à dire au sujet de la situation des nœuds, le tableau suivant donne la répartition des longitudes des nœuds ascendants des 324 comètes de notre catalogue sur chaque intervalle de 20°.

0° à	20°	15	200° à	220°	17
20	40	16	220	240	19
40	60	20	240	260	13
60	80	14	260	280	20
80	100	19	280	300	19
100	120	21	300	320	15
120	140	15	320	340	10
140	160	17	340	360	18
160	180	9	360	380	19
180	200	14	380	400	14
<hr/>			<hr/>		
160			164		

Chaque longitude est rapportée à l'équinoxe de l'année de l'apparition de la comète; en adoptant un équinoxe fixe on aurait un résultat peu différent, parce que les anciennes comètes sont en petit nombre. On voit que les longitudes des nœuds sont réparties assez uniformément tout le long de l'écliptique.

Inclinaisons.

73. — On sait que les comètes à courte période ont presque toutes un mouvement direct et des orbites peu inclinées sur l'écliptique. Comme ces comètes reviennent fréquemment au périhélie la probabilité de leur découverte est plus grande que pour les autres et il est naturel de les traiter à part dans la statistique des inclinaisons. Le tableau suivant donne les nombres d'inclinaisons des orbites pour chaque intervalle de 20° , dans la colonne A les 324 comètes de notre catalogue ont été prises en considération, dans la colonne B les 33 comètes dont la durée de révolution est moindre qu'un siècle ont été supprimées.

		A	B
0° à	20°	36	17
20	40	27	21
40	60	29	26
60	80	33	32
80	100	42	40
100	120	41	41
120	140	38	38
140	160	42	42
160	180	22	22
180	200	14	12
		<hr/>	<hr/>
		324	291

On voit que, surtout après suppression des comètes périodiques, le nombre des inclinaisons comprises dans un intervalle de 20° est plus grand près de 100° que près de 0 et 200° . Il fallait s'y attendre d'après ce qui a été dit n° 62, et si nous voulons comparer la loi des inclinaisons avec l'hypothèse que les plans des orbites sont distribués dans l'espace indifféremment en tous sens, il faut faire croître le cosinus de l'inclinaison par intervalles égaux et compter le

nombre des plans des orbites dans chaque intervalle. Le tableau suivant donne cette statistique en faisant croître le cosinus par intervalles de 0,2.

COSINUS	ANGLE	A	B
+ 1,0 à + 0,8	0°,0 à 41°,0	63	38
+ 0,8 + 0,6	41,0 59,0	29	26
+ 0,6 + 0,4	59,0 73,8	27	26
+ 0,4 + 0,2	73,8 87,2	19	18
+ 0,2 + 0,0	87,2 100,0	29	28
0,0 — 0,2	100,0 112,8	24	24
— 0,2 — 0,4	112,8 126,2	28	28
— 0,4 — 0,6	126,2 141,0	29	29
— 0,6 — 0,8	141,0 159,0	38	38
— 0,8 — 1,0	159,0 200,0	38	36
		<hr/> 324	<hr/> 291

Dans l'hypothèse d'une distribution uniforme des plans des orbites tous les nombres de ce tableau devraient être égaux. La première chose qui apparaît est que lorsqu'on conserve les comètes périodiques les faibles inclinaisons présentent une forte prépondérance ; lorsqu'on les supprime, il y a encore près de l'écliptique une certaine accumulation des orbites qui se présente tant pour les mouvements rétrogrades que pour les mouvements directs. Il est difficile de décider si cette accumulation est réelle, ou si elle résulte seulement de ce que les comètes qui se meuvent dans des orbites peu inclinées seraient découvertes plus facilement que les autres. Remarquons aussi que lorsqu'on fait abstraction des comètes périodiques, il y a plus de mouvements rétrogrades que de mouvements directs (155 et 136), cela tient sans doute à ce que les comètes rétrogrades allant sans cesse au devant de la Terre, ont moins de chances que les autres de rester inaperçues (n° 68).*

D'après M. Holetschek (Ueber die Vertheilung....), on aurait des raisons de penser que les comètes dont les inclinaisons sont près

de 100° ont plus de chance d'être découvertes que celles dont les orbites se trouvent dans l'écliptique, de sorte qu'il serait possible qu'en réalité le nombre des inclinaisons comprises dans chaque intervalle de 20° soit partout le même. Si cela était, puisque au cas où les plans des orbites n'ont aucune liaison avec l'écliptique, les petites valeurs de l'inclinaison doivent être beaucoup plus rares que les grandes, il n'est pas douteux que les plans des orbites présenteraient une forte accumulation près de l'écliptique, ce qui serait une forte raison en faveur de l'opinion que les comètes sont des membres permanents du Système solaire. Mais à l'appui de l'idée que les comètes qui se meuvent dans l'écliptique peuvent nous échapper plus facilement que les autres M. Holetschek ne donne que des considérations générales qu'il paraît lui-même ne pas considérer comme entièrement probantes.

On trouvera dans le même mémoire de cet auteur une statistique de la moyenne des distances périhéliques qui correspondent aux diverses valeurs de l'inclinaison, cette statistique conduit au résultat que lorsqu'on fait abstraction des comètes périodiques la moyenne des distances périhéliques reste sensiblement la même quelle que soit l'inclinaison des orbites. Quant aux comètes périodiques, nous avons vu qu'elles ont presque toutes de faibles inclinaisons et que leurs distances périhéliques sont en moyenne supérieures à celles des autres comètes.

Remarquons encore que la moyenne des inclinaisons des orbites des comètes de notre catalogue, comptées seulement de 0 à 100°, est :

Pour les 324 comètes.....	55°,468						
Pour les 33 comètes dont la révolution est inférieure à un siècle.....	23,319						
Après suppression des 33 périodiques.....	<table> <tr> <td>{ pour les 291 comètes...</td><td>59,114</td></tr> <tr> <td>{ pour les 136 directes. ..</td><td>58,711</td></tr> <tr> <td>{ pour les 155 rétrogrades</td><td>59,467</td></tr> </table>	{ pour les 291 comètes...	59,114	{ pour les 136 directes. ..	58,711	{ pour les 155 rétrogrades	59,467
{ pour les 291 comètes...	59,114						
{ pour les 136 directes. ..	58,711						
{ pour les 155 rétrogrades	59,467						

On sait que la moyenne des inclinaisons d'un grand nombre de plans placés indifféremment dans toutes les positions est $63^{\circ},662$ (n° 62).

74. — Au sujet des inclinaisons des orbites, je dois faire remarquer que le fait que la moyenne des inclinaisons d'un grand nombre de plans placés indifféremment dans toutes les positions doit être $63^{\circ},662$ a échappé à Laplace. En effet, ce célèbre astronome faisant la moyenne des inclinaisons des comètes connues de son temps ⁽¹⁾, trouve $51^{\circ},737$; comme ce nombre dépasse 50° de $1^{\circ},737$, il en conclut que loin de participer à la tendance des corps du Système planétaire à se mouvoir dans des plans peu inclinés sur l'écliptique, les comètes paraissent avoir une tendance contraire, mais dont la probabilité est très petite. D'après ce que nous avons dit (n° 62), ce n'est pas à 50° , mais à $63^{\circ},662$ qu'il faut comparer la moyenne des inclinaisons, et alors les orbites des comètes paraîtraient avoir une certaine tendance à se rapprocher de l'écliptique.

La cause de cette inadvertance de Laplace vient de ce qu'il assimile les diverses inclinaisons à des boules numérotées qu'on tirerait dans une urne; cette assimilation n'est pas juste, si l'on ne met qu'une boule de chaque numéro, car aux inclinaisons nulles ne correspond qu'un seul plan, l'écliptique, aux fortes inclinaisons au contraire correspondent une série de plans différents. Si l'on veut assimiler chaque valeur de l'inclinaison à une boule numérotée tirée dans une urne, il faut donc admettre qu'il y a plusieurs boules qui portent le même numéro, et que le nombre des boules est différent selon le numéro qu'elles portent. M. Cournot, dans son mémoire « Sur la distribution des orbites cométaires dans l'espace », a insisté sur le fait que la moyenne théorique des inclinaisons est $63^{\circ},662$ et non 50° .

(1) *Théorie analytique des probabilités*, livre II, n° 13; et *Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes* (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris*, année 1773, tome VII).

Mentionnons encore le mémoire de M. H.-A. Newton sur l'origine des comètes (1). Cet auteur arrive à des conclusions intéressantes, bien que plusieurs suppositions admises dans son mémoire, au sujet de la disposition théorique des éléments des orbites, ne se trouvent pas d'accord avec les résultats que nous avons obtenus. Il montre que si l'on fait abstraction des comètes à courte période, les inclinaisons sont réparties à peu près comme l'exige une distribution uniforme des plans des orbites, et qu'il est très admissible que la distribution ait été à l'origine tout à fait uniforme, les écarts qu'on constate aujourd'hui pouvant s'expliquer par l'action perturbatrice des planètes. Si l'on supposait que les comètes se sont trouvées à l'origine dans l'écliptique et que leurs petites vitesses initiales étaient dirigées indifféremment en tous sens, toutes les valeurs de l'inclinaison auraient été également probables, de sorte que le nombre des valeurs comprises dans un intervalle de 20° par exemple aurait été partout le même ; M. Newton montre qu'il n'est guère possible d'admettre que les perturbations des planètes ont pu ramener cette disposition à celle que nous constatons aujourd'hui.

A mon avis on ne peut pas voir là une objection capitale, contre l'idée que les comètes ont toujours fait partie du Système solaire, parce que cette opinion n'entraîne pas nécessairement la conséquence qu'elles étaient à l'origine près de l'écliptique. L'aspect des comètes et la nature de leurs orbites montrent que ces astres sont différents des planètes, ils peuvent donc faire partie du Système solaire à un autre titre que les planètes et avoir pris naissance aussi bien loin que près de l'écliptique, c'est ce qui paraît résulter du mémoire de M. H.-A. Newton.

(1) *American Journal of Science and Arts*, septembre 1878

CONCLUSION DES DEUX DERNIERS CHAPITRES

75. — Les résultats obtenus dans les deux derniers chapitres montrent qu'il nous est difficile de connaître la véritable disposition des éléments des orbites, parce que des circonstances purement terrestres influent beaucoup sur les découvertes. Mais dans la disposition des éléments des comètes que nous connaissons, on ne voit aucune trace du mouvement du Système solaire ; le seul fait qu'on avait cru pouvoir attribuer à ce mouvement, savoir : l'accumulation des périhélies vers les longitudes 100° et 300° , ne peut pas être dû à cette cause et s'explique par l'influence des saisons terrestres sur les découvertes.

On ne peut donc pas alléguer la disposition des éléments en faveur de l'opinion que les comètes viennent des espaces interstellaires, et comme d'après les deux premiers chapitres, cette opinion ne peut pas rendre compte de l'absence des orbites hyperboliques, il faut admettre que les comètes sont des membres permanents du Système solaire, et par conséquent que ce Système s'étend bien au delà des planètes que nous connaissons. Ce sera notre conclusion finale.

Vu et approuvé :

Paris, le 11 juillet 1893.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 11 juillet 1893,

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

Nombre des orbites de grand axe donné à une grande distance du Soleil.

Numéros		Pages
1	Préliminaires	4
	<i>Compte-rendu des travaux déjà publiés.</i>	
2-6	Mémoire de Laplace.	5
7-10	Remarques de Gauss et M. Schiaparelli sur le calcul de Laplace. .	15
11-12	Mémoires de M. Schiaparelli et de M. Seeliger	30
	<i>Étude de la question en supposant le Soleil immobile.</i>	
13-15	Recherche des formules	35
16-19	Conséquences des formules	41
	<i>Étude de la question en tenant compte du mouvement du Soleil.</i>	
20	Notions sur les mouvements du Soleil et des étoiles.	49
21-24	Recherche des formules	57
25-31	Conséquences des formules	71

CHAPITRE II

Nombre des orbites de grand axe donné dans le voisinage du Soleil.

32	Mémoire de M. Davis	100
33	Remarques sur la fonction φ	109
	<i>Suite de notre étude sur la probabilité des comètes hyperboliques.</i>	
34-36	Cas où l'on suppose le Soleil immobile	113
37-42	Conséquences des formules	120
43-45	Solution en tenant compte du mouvement du Soleil.	129
46-54	Conséquences des formules	138
55	Conclusion des deux premiers chapitres	156

CHAPITRE III

Disposition théorique des éléments autres que le grand axe.

Numéros		Pages
56-57	Distances périhélies	159
58-60	Directions asymptotiques	163
61-64	Plans des orbites.	169

CHAPITRE IV

Disposition des éléments des orbites, telle qu'elle résulte de l'observation.

65	Préliminaires	181
66	Nombre des comètes selon les saisons	183
67-68	Relation entre la longitude du périhélie et l'époque du passage . .	187
69	Disposition des longitudes des périhélies	193
70	Latitudes des périhélies	198
71	Distances périhélies	203
72	Longitudes des nœuds.	205
73-74	Inclinaisons	206
75	Conclusion des deux derniers chapitres	211

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Ondes cylindriques produites à la surface d'une eau primitivement en repos, par l'émersion d'un cylindre solide (à génératrices horizontales), qui était d'abord quelque peu immergé dans cette eau, et qu'on enlève rapidement, le cylindre étant indéfini en longueur, et la masse liquide se trouvant aussi indéfinie en longueur, largeur et profondeur.

Vu et approuvé :

Paris, le 11 juillet 1893.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 11 juillet 1893.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.